8.2 スピン和

今までは始状態・終状態が完全に指定されていたが、多くの実験では始状態は非偏極であって、終状態の偏極は観測しない。この場合、始状態の偏極に関して平均を、終状態の偏極に対して和を取る必要がある。

$$\mathscr{M} = \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}) \tag{8.20}$$

の形をした Feynman 振幅を考える。$\bar{u}_s(\mathbf{p}'), u_r(\mathbf{p})$ は完全に偏極状態が指定されており、演算子 Γ は γ 行列によって構成される 4×4 行列である。非偏極状態の断面積を考えるときは、上述のように

$$|\mathscr{M}|^2 \to X \equiv \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\mathscr{M}|^2 \tag{8.21}$$

と変更すればよい。ここで

$$\widetilde{\Gamma} \equiv \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{8.22}$$

を定義すれば (8.21) は

$$X = \frac{1}{2}\sum_r\sum_s \left(\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p})\right)\left(\bar{u}_r(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}u_s(\mathbf{p}')\right) \tag{8.23}$$

スピノルの添え字を書けば

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\sum_r\sum_s \left(\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\Gamma_{\alpha\beta}u_{r\beta}(\mathbf{p})\right)\left(\bar{u}_{r\gamma}(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}u_{s\delta}(\mathbf{p}')\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_s u_{s\delta}(\mathbf{p}')\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\right)\Gamma_{\alpha\beta}\left(\sum_r u_{r\beta}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\gamma}(\mathbf{p})\right)\widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

ここで、スピノルの完全性関係（別冊 (5.47) 参照。ただし規格化が異なることに注意）

$$\begin{aligned} \sum_s u_{s\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \\ \sum_s v_{s\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{s\beta}(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

より、正エネルギー射影演算子は

$$\Lambda^+_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \equiv \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} = \sum_s u_{s\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}) \tag{8.24a}$$

と表せることが分かる。よって

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\Lambda^+_{\delta\alpha}(\mathbf{p})\Gamma_{\alpha\beta}\Lambda^+_{\beta\gamma}(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(\mathbf{p})\Gamma\Lambda^+(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}'+m}{2m}\Gamma\frac{\not{p}+m}{2m}\widetilde{\Gamma}\right] \end{aligned} \tag{8.25}$$

と計算できる。この Feynman 振幅はレプトンを消滅・生成する反応に寄与するが、他の反応を考えることもできる。例えば

$$\mathscr{M} = \bar{v}_s(\mathbf{p}')\Gamma v_r(\mathbf{p}) \tag{8.26a}$$

$$\mathscr{M} = \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma v_r(\mathbf{p}) \tag{8.26b}$$

$$\mathscr{M} = \bar{v}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}) \tag{8.26c}$$

(a) は反レプトンの消滅・生成、(b) はレプトンと反レプトンの対生成、(c) は対消滅に寄与する振幅である。これらを考える際には負エネルギー演算子

$$\Lambda^-_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \equiv -\left(\frac{\not{p} - m}{2m}\right)_{\alpha\beta} = -\sum_r v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}) \tag{8.24b}$$

を使えばよい。例えば (b) なら

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_r\sum_r|\mathscr{M}|^2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(\mathbf{p})\Gamma\Lambda^-(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}' + m}{2m}\Gamma\frac{\not{p} - m}{2m}\widetilde{\Gamma}\right]\end{aligned} \tag{8.27}$$

Trace の計算は後の章で。

スピン偏極の性質を調べるには、特定の始状態・終状態について Feynmann 振幅を評価する必要がある。その簡単な方法としてヘリシティ・スピン射影演算子を用いるものがある。例として (8.20) の過程について、始状態の電子が正ヘリシティ(1)、終状態の電子が負ヘリシティ(2) の場合を考える。このとき、断面積は以下の因子に比例する:

$$\begin{aligned}X &= \left|\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p})\right|^2 \\ &= \left(\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p})\right)\left(\bar{u}_1(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}u_2(\mathbf{p}')\right)\end{aligned} \tag{8.28}$$

ここで、ヘリシティ射影演算子

$$\Pi^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}) \tag{A.37}$$

を導入する。ヘリシティ演算子 $\sigma_{\mathbf{p}}$ について

$$\sigma_{\mathbf{p}}u_1(\mathbf{p}) = \mathbf{u_1}(\mathbf{p})$$
$$\sigma_{\mathbf{p}}u_2(\mathbf{p}) = -\mathbf{u_2}(\mathbf{p})$$

が成り立つことを思い出せば、この演算子は

$$\Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{1r}u_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{2r}u_r(\mathbf{p}) \tag{A.40}$$

という性質を持つ (確かにヘリシティ射影演算子になっている)。よって

$$\begin{aligned}
X &= \sum_r \sum_s \delta_{1r}\delta_{2s} \left(\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p})\right) \left(\bar{u}_r(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma} u_s(\mathbf{p}')\right) \\
&= \sum_r \sum_s \left(\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma \delta_{1r} u_r(\mathbf{p})\right) \left(\bar{u}_r(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma} \delta_{2s} u_s(\mathbf{p}')\right) \\
&= \sum_r \sum_s \left(\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\Gamma_{\alpha\beta}\Pi^+_{\beta\gamma}(\mathbf{p}) u_{r\gamma}(\mathbf{p})\right) \left(\bar{u}_{r\mu}(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu}\Pi^-_{\nu\sigma}(\mathbf{p}') u_{s\sigma}(\mathbf{p}')\right) \\
&= \left(\sum_s u_{s\sigma}(\mathbf{p}')\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\right) \Gamma_{\alpha\beta}\Pi^+_{\beta\gamma}(\mathbf{p}) \left(\sum_r u_{r\gamma}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\mu}(\mathbf{p})\right) \widetilde{\Gamma}_{\mu\nu}\Pi^-_{\nu\sigma}(\mathbf{p}') \\
&= \Lambda^+_{\sigma\alpha}(\mathbf{p}')\Gamma_{\alpha\beta}\Pi^+_{\beta\gamma}(\mathbf{p})\Lambda^+_{\gamma\mu}(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu}\Pi^-_{\nu\sigma}(\mathbf{p}') \\
&= \mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(\mathbf{p}')\Gamma\Pi^+(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p})\widetilde{\Gamma}\Pi^-(\mathbf{p}')\right] \qquad (8.29)
\end{aligned}$$

相対論的領域 $E \gg m$ ではヘリシティ射影演算子は簡単になる。$m \approx 0$ とすれば、$p^0 = |\mathbf{p}|$ であるから、Dirac 方程式より

$$\begin{gathered}
(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0 \\
\Rightarrow \gamma^0 |\mathbf{p}| u_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k u_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k u_r(\mathbf{p})
\end{gathered}$$

両辺に左から $\gamma^5\gamma^0$ をかけると

$$\gamma^5 u_r(\mathbf{p}) = -\frac{\gamma^0\gamma^5\gamma^k p^k u_r(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}$$

となる。ここで

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

を思い出そう。(μ, ν) に $i, j, k = 1, 2, 3$ が cyclic に充てられている場合を考えると

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \frac{i}{2}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] \\
&= i\gamma^i\gamma^j \\
&= i\gamma^0\gamma^0\gamma^i\gamma^j\left(-\gamma^k\gamma^k\right) \\
&= -\gamma^0\gamma^5\gamma^k
\end{aligned}$$

となる。ただし、$\gamma^i\gamma^j\gamma^k$ は $i, j, k = 1, 2, 3$ が cyclic なら必ず偶数回の交換で $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ に並び替えられることに注意。
従って

$$\gamma^5 u_r(\mathbf{p}) = \frac{\sigma^{ij} p^k}{|\mathbf{p}|} u_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p})$$

ゆえに、ヘリシティ射影演算子は γ^5 を用いて

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right) \quad (E \gg m) \qquad (A.43)$$

と表せる。

8.3 光子の偏極和

ゲージ不変性からは、Feynman 振幅のようなゲージ不変量を生じる。摂動の与えられた次数の全ての Feynman ダイヤグラムに対応する Feynman 振幅は不変だが、一般には、一つの Feynman ダイヤグラムに対応する Feynman 振幅は不変でない。例えば Compton 散乱の Feynman 振幅 $\mathscr{M}_a, \mathscr{M}_b$ それぞれは不変でないが、その和は不変量である。

光子の外線を含む次のような振幅を考える:

$$\mathscr{M} = \varepsilon^{\alpha}_{r1}(\mathbf{k}_1)\varepsilon^{\beta}_{r2}(\mathbf{k}_2)\cdots\mathscr{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) \tag{8.30}$$

光子の外線を含むダイヤグラムに振幅がこの形に表せることは、Feynman 則から直ちにわかる。偏極ベクトルはゲージに依存するから、例えば Lorenz ゲージ

$$A^{\mu}(x) = \text{const.}\ \varepsilon^{\mu}_{r}(\mathbf{k})e^{\pm ikx}$$

を考えることにする。ゲージ変換

$$A^{\mu}(x) \to A^{\mu}(x) + \partial^{\mu} f(x) \quad \text{with } f(x) = \widetilde{f}(k)e^{\pm ikx}$$

に対して偏極ベクトルは

$$\varepsilon^{\mu}_{r}(\mathbf{k})e^{\pm ikx} \to \left[\varepsilon^{\mu}_{r}(\mathbf{k}) \pm ik^{\mu}\widetilde{f}(k)\right] e^{\pm ikx} \tag{8.31}$$

と変換する。よって $\mathscr{M}$ が不変であるための条件は

$$k^{\alpha}_{1}\mathscr{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) = k^{\beta}_{2}\mathscr{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) = \cdots = 0 \tag{8.32}$$

ここで簡単な例

$$\mathscr{M}_r(\mathbf{k}) = \varepsilon^{\alpha}_{r}(\mathbf{k})\mathscr{M}_{\alpha}(\mathbf{k})$$

について、偏極状態の和を計算してみる。ゲージ条件は

$$k^{\alpha}\mathscr{M}_{\alpha}(\mathbf{k}) = 0 \tag{8.33}$$

非偏極断面積は次の量に比例する:

$$X = \sum_{r=1}^{2} |\mathscr{M}_r(\mathbf{k})|^2 = \mathscr{M}_{\alpha}(\mathbf{k})\mathscr{M}^{*}_{\beta}(\mathbf{k}) \sum_{r=1}^{2} \varepsilon^{\alpha}_{r}(\mathbf{k})\varepsilon^{\beta}_{r}(\mathbf{k}) \tag{8.34}$$

ここで、5 章で取った偏極ベクトルの具体的な表示を使うと、光子の伝播関数が

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta}_{F} &= \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left\{\sum_{r=1}^{2}\varepsilon^{\alpha}_{r}(\mathbf{k})\varepsilon^{\beta}_{r}(\mathbf{k}) + \frac{\left[k^{\alpha} - (kn)n^{\alpha}\right]\left[k^{\beta} - (kn)n^{\beta}\right]}{(kn)^2 - k^2} - n^{\alpha}n^{\beta}\right\} \end{aligned}$$

と表せたことを思い出そう。実光子の条件 $k^2 = 0$ を適用すれば、1 行目と 2 行目を比較して

$$\sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(kn)^2}\left[k^\alpha k^\beta - (kn)\left(k^\alpha n^\beta + k^\beta n^\alpha\right)\right] \tag{8.35}$$

を得る。ゲージ条件より k^μ を含む項は消えて、結局

$$\sum_{r=1}^{2} |\mathscr{M}_r(\mathbf{k})|^2 = -\mathscr{M}^\alpha(\mathbf{k})\mathscr{M}_\alpha^*(\mathbf{k}) \tag{8.36}$$

となる。これは Lorenz ゲージで成り立つ式であることに注意。あるゲージでは露わな Lorenz 不変性を失うことがあるが、Trace の計算を簡単にするためにそのようなゲージを取ることもある。