4
Dirac 場

担当：細谷享平

5 月 13 日（月）

概 要

本章では、Fermi-Dirac 統計に従う、フェルミオン粒子の系を考える。4.1 節において交換条件を反交換条件に修正し、その後 Dirac 方程式に応用し、フェルミオンのスピンや統計性を見ていく。

4.1 フェルミオンの表現

節 1.2.2 や 1.2.3 で行ったボゾンの表現は以下のようなものであった。

$$\left[a_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathrm{rs}}, \quad \left[a_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}\right] = \left[a_{\mathrm{r}^{\dagger}}, a_{\mathrm{s}}^{\dagger}\right] = 0 \tag{1}$$

$$N_{\mathrm{r}} = a_{\mathrm{r}}^{\dagger} a_{\mathrm{r}} \tag{2}$$

$$\left[N_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}\right] = -\delta_{\mathrm{rs}} a_{\mathrm{s}}, \quad \left[N_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathrm{rs}} a_{\mathrm{s}}^{\dagger} \tag{3}$$

これらより、$a_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{r}}^{\dagger}, N_{\mathrm{r}}$ がそれぞれ、消滅（吸収）演算子、生成演算子粒子数演算子と解釈できる。また、N_{r} の取りうる固有値は、$n_{\mathrm{r}} = 0, 1, 2, \ldots$ となっている。

もう一つの関係性として、交換関係を反交換関係に置き換えるものがある。ここでは反交換関係を以下のように記述、及び定義する。

$$[A, B]_{+} \equiv AB + BA \tag{4}$$

よく用いられる恒等式として次が成立。

$$[AB, C] = A\,[B, C]_{+} - [A, C]_{+}\,B \tag{5}$$

生成消滅演算子の関係性を、この反交換関係に置き換えると、

$$\left[a_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}^{\dagger}\right]_{+} = \delta_{\mathrm{rs}}, \quad \left[a_{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{s}}\right]_{+} = \left[a_{\mathrm{r}}^{\dagger}, a_{\mathrm{s}}^{\dagger}\right] = 0 \tag{6}$$

この関係性で特に、

$$\left(a_{\mathrm{r}}\right)^{2} = \left(a_{\mathrm{r}}^{\dagger}\right)^{2} = 0 \tag{7}$$

が成立する。さらに、粒子数演算子について

$$N_{\mathrm{r}}^2 = a_{\mathrm{r}}^{\dagger} a_{\mathrm{r}} a_{\mathrm{r}}^{\dagger} a_{\mathrm{r}} = a_{\mathrm{r}}^{\dagger} \left(1 - a_{\mathrm{r}}^{\dagger} a_{\mathrm{r}}\right) a_{\mathrm{r}} = N_{\mathrm{r}} \tag{8}$$

ゆえに、

$$N_{\mathrm{r}} \left(N_{\mathrm{r}} - 1\right) = 0 \tag{9}$$

が成立する。これより、演算子 N_{r} の固有値は、$n_{\mathrm{r}} = 0, 1$ である。これらは、Fermi-Dirac 統計をよく表している。最後に、真空状態、1 粒子状態、2 粒子状態は以下のようにかける。

$$a_{\mathrm{r}} \left|0\right\rangle = 0 \, (\mathrm{all} \quad \mathrm{r}) \tag{10}$$

$$\left|1_{\mathrm{r}}\right\rangle = a_{\mathrm{r}}^{\dagger} \left|0\right\rangle \tag{11}$$

$$\left|1_{\mathrm{r}} 1_{\mathrm{s}}\right\rangle = a_{\mathrm{r}}^{\dagger} a_{\mathrm{s}}^{\dagger} \left|0\right\rangle = -a_{\mathrm{s}}^{\dagger} a_{\mathrm{r}}^{\dagger} \left|0\right\rangle = -\left|1_{\mathrm{s}} 1_{\mathrm{r}}\right\rangle \quad (\mathrm{r} \neq \mathrm{s}) \tag{12}$$

当然、同じ状態に 2 粒子が入る場合は、

$$\left|2_{\mathrm{r}}\right\rangle = \left(a_{\mathrm{r}}^{\dagger}\right)^2 \left|0\right\rangle = 0 \tag{13}$$

となり、これはパウリの排他律に一致する。

4.2 Dirac 方程式

静止質量 m の Dirac 方程式は、

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha} \bullet (-\mathrm{i}\hbar \boldsymbol{\nabla}) + \beta m c^2\right] \psi(x) \tag{14}$$

となる（導出は「クォークとレプトン」で行ったので、割愛）。これは以下のように書き直せる。

$$\mathrm{i}\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^{\mu}} - mc\psi(x) = 0 \tag{15}$$

ここで γ は、

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^{\mathrm{i}} = \beta \alpha_{\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i} = 1, 2, 3 \tag{16}$$

であり、次が成立。

$$\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]_{+} = 2g^{\mu\nu} \tag{17}$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma \ 0 \gamma^{\mu} \gamma^0 \tag{18}$$

また、随伴的な場を次で定義。

$$\bar{\psi}(x) = \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \tag{19}$$

この場は、次の方程式を満たす。

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} + mc\bar{\psi}(x) = 0 \tag{20}$$

Dirac 方程式 (15) や (20) を導くラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(x)\left[\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right]\psi(x) \tag{21}$$

とかける。実際に確認すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\alpha}} \Rightarrow 0 = c\left[\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right]\psi \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\alpha}} \Rightarrow -mc^2\bar{\psi} = c\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\gamma^\alpha \tag{23}$$

と、式 (15)、(20) が導かれる。共役な場は、

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi}\mathrm{i}\hbar\gamma^0 = \mathrm{i}\hbar\psi^\dagger(x) \tag{24}$$

$$\bar{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \tag{25}$$

これらを用いて、Dirac 場のハミルトニアンと運動量を求めていく。まずハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left(\pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}\right) \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left(\mathrm{i}\hbar\psi^\dagger(x)\dot{\psi}(x) - \bar{\psi}(x)\left[\mathrm{i}\hbar c\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2\right]\psi(x)\right) \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\bar{\psi}(x)\left[\mathrm{i}\hbar c\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} - \mathrm{i}\hbar c\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2\right]\psi(x) \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\bar{\psi}(x)\left[-\mathrm{i}\hbar c\gamma^\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial x^\mathrm{j}} + mc^2\right]\psi(x) \end{aligned} \tag{26}$$

同様にして、運動量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\pi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial\boldsymbol{x}} \\ &= -\mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\nabla}\psi(x) \end{aligned} \tag{27}$$

となる。

次に角運動量を見ていく。まず、角運動量を導く微小変換は、微小ローレンツ変換であり、それは

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon_{\mu nu}\sigma^{\mu\nu}\psi(x) \tag{28}$$

とかける（導出は「クォークとレプトン」参照）。ここで、$\sigma^{\mu\nu}$ は μ と ν で指定される各々が 4×4 行列であり、

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{29}$$

2 章で見た、角運動量の表式を思い出すと、

$$cM^{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\left[x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha} \right] + c\pi(x) S^{\alpha\beta} \phi(x) \right) \tag{30}$$

であり、今

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\alpha\beta}, \quad \mathcal{T}^{0\alpha} = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = c\mathrm{i}\hbar\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \tag{31}$$

である。具体的に、1 つの成分 M^{23} を計算すると、

$$\begin{aligned} cM^{23} &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\left[x^{(2)} c\mathrm{i}\hbar\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^{(3)}} - x^{(3)} c\mathrm{i}\hbar\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^{(2)}} \right] - \frac{\mathrm{i}}{2} c\mathrm{i}\hbar\psi^\dagger \sigma^{23}\psi \right) \\ &= c\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\left[\psi^\dagger \quad \boldsymbol{x} \times (-\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}) \quad \psi \right]^{(1)} + \psi^\dagger (\frac{\hbar}{2}\sigma^{23})\psi \right) \end{aligned} \tag{32}$$

右肩の括弧の数字は成分を表す。他成分も同様に計算し、

$$\boldsymbol{M} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \tag{33}$$

とおくと、

$$\boldsymbol{M} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x) \quad [\boldsymbol{x} \times (-\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla})] \quad \psi(x) + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x)(\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma})\psi(x) \tag{34}$$

とかける。この表式から、第 1 項が軌道角運動量、第 2 項がスピン角運動量に相当していることがわかる。以上のような形で、Dirac 方程式から、スピンが導かれる。

対称性と保存量の関係として最後に、位相変換不変性と電荷をみていく。今、$\psi(x)$、$\psi^\dagger(x)$ それぞれで位相変換に対して不変である。再び 2 章での表式を用いることで、電荷は

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\mathrm{i}q}{\hbar} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\pi(x)\psi(x) \\ &= q\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x)\psi(x) \end{aligned} \tag{35}$$

（＊今、$\bar{\pi}(x) = 0$ である。）また、電荷・電流密度は

$$s^\alpha(x) = (c\rho(x), \boldsymbol{j}(x)) = cq\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x) \tag{36}$$

実際に、電荷・電流密度に対する連続の方程式は、Dirac 方程式から直接的に示すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\alpha} &= cq\bar{\psi}\gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + cq\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\gamma^\alpha\psi \\ &= \frac{mc^2 q}{\mathrm{i}\hbar}\bar{\psi}\psi - \frac{mc^2 q}{\mathrm{i}\hbar}\bar{\psi}\psi = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

1 行目から 2 行目への変形で、Dirac 方程式（15)、(20）を用いた。

Dirac 方程式の平面波解については、「クォークとレプトン」でやったので、割愛する。

4.3 第二量子化

Dirac 方程式の解を、平面波解で展開したものを、

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^{+}(x)+\psi^{-}(x) \\ &= \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}+d_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})v_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \quad (38)\end{aligned}$$

とかく。この時、共役な場は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{+}(x)+\bar{\psi}^{-}(x) \\ &= \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\bar{v}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}+c_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \quad (39)\end{aligned}$$

ここで、$\bar{u}_{\mathrm{r}}=u_{\mathrm{r}}^{\dagger}\gamma^0$ とした。

Klein-Gordon 場の場合との類推から、次のような反交換関係を適用する。

$$\left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}),c_{\mathrm{s}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\right]_{+}=\left[d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}),d_{\mathrm{s}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\right]_{+}=\delta_{\mathrm{rs}}\delta_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'} \quad (40)$$

なお、この他の反交換関係の組は、すべてゼロとする（反可換）。また、

$$N_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})=c_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}),\quad \bar{N}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})=d_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) \quad (41)$$

と定義する。これら、$c_{\mathrm{r}},c_{\mathrm{r}}^{\dagger},N_{\mathrm{r}}$ 及び $d_{\mathrm{r}},d_{\mathrm{r}}^{\dagger},\bar{N}_{\mathrm{r}}$ はそれぞれ 2 種類の粒子の、消滅、生成、粒子数演算子に対応する。

真空状態は、次式で定義される。

$$c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle=d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle=0,\quad \mathrm{all}\boldsymbol{p}\quad \mathrm{and}\quad r=1,2 \quad (42)$$

もしくは同値な表現として、

$$\psi^{+}(x)\left|0\right\rangle=\bar{\psi}^{+}(x)=0,\quad \mathrm{all}\quad x \quad (43)$$

4.2 節で導出した、エネルギーや運動量の表示は、真空状態においてゼロではない。そこで再び、normal product を導入する。反交換関係に注意し、次で定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\psi_\alpha\psi_\beta) &= \mathrm{N}\left[(\psi_\alpha^{+}+\psi_\alpha^{-})(\psi_\beta^{+}+\psi_\beta^{-})\right] \\ &= \psi_\alpha^{+}\psi_\beta^{+}-\psi_\beta^{-}\psi_\alpha^{+}+\psi_\alpha^{-}\psi_\beta^{+}+\psi_\alpha^{-}\psi_\beta^{-} \quad (44)\end{aligned}$$

以下では、normal product を用いて種々の物理量を再定義し、それらを消滅、生成、粒子数演算子で表現することを試みる。まず、エネルギーは、normal product を用いると、改めて

$$H=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{N}\left\{\bar{\psi}(x)\left[-\mathrm{i}\hbar c\gamma^{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{j}}}+mc^2\right]\psi(x)\right\} \quad (45)$$

とかける。ここで、$\psi(x)$ は Dirac 方程式の解であることから、

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^{\mathrm{j}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mathrm{j}}} = -\mathrm{i}\hbar\frac{1}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} + mc\psi \tag{46}$$

であるから、

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{N}\left\{\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\hbar)\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} \\ &= \mathrm{i}\hbar c\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{N}\left(\psi^\dagger(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0}\right) \end{aligned} \tag{47}$$

平面波展開より、

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} = \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\hbar}\left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar} - d_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})v_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \tag{48}$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{\mathrm{s}\boldsymbol{p}'}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}'}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')v_{\mathrm{s}}^\dagger(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x/\hbar} + c_{\mathrm{s}}^\dagger(\boldsymbol{p}')u_{\mathrm{s}}^\dagger(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x/\hbar}\right] \tag{49}$$

これらを代入すると、

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{N}\left(\psi^\dagger(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0}\right) &= \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{c}\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2}c_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) \\ &\quad + \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{c}\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2}d_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\hbar c}\sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}}\left[c_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) + d_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\right] \end{aligned} \tag{50}$$

式変形においては、

$$p_0 = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{c}, \tag{51}$$

体積積分でのデルタ関数の定義式

$$\frac{1}{V}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(p-p')x}{\hbar}} = \delta(p-p') \tag{52}$$

及び、平面波解の直交関係

$$u_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}) = v_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})v_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}) = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2}\delta_{\mathrm{rs}} \tag{53}$$

$$u_{\mathrm{r}}^\dagger(\boldsymbol{p})v_{\mathrm{s}}(-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{54}$$

を用いた。以上より、

$$H = \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}}\left[N_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) + \bar{N}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\right] \tag{55}$$

とかける。

同様にして、

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{p}}{\hbar}\right) \left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar} - d^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})v_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \tag{56}$$

より、

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}\left[N_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) + \bar{N}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\right] \tag{57}$$

とかける。また、

$$Q = -e\sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}} \left[N_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}) - \bar{N}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\right] \tag{58}$$

なお、$\bar{N}_{\mathrm{r}}$ の前の負符号は、normal product による負符号である。

スピンについては、運動量方向の成分をとり、4.2 節の結果から次のように定義する。

$$S_{\boldsymbol{p}} = \frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{N}\left[\psi^{\dagger}(x)\sigma_{\boldsymbol{p}}\psi(x)\right] \tag{59}$$

今、デルタ関数の積分表示 (52) を用いることで、

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{p}} \;\; = \;\; & \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathrm{s,t},\boldsymbol{p}'} \frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}'}} \Big[d_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')c_{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{p}')v^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\boldsymbol{p}}u_{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{p}') \\ & -d^{\dagger}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{p}')d_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')v^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\boldsymbol{p}}v_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{p}') \\ & +c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')c_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{p}')u^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\boldsymbol{p}}u_{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{p}') \\ & +c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')d^{\dagger}_{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{p}')u^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\boldsymbol{p}}v_{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{p}')\Big] \end{aligned} \tag{60}$$

この $S_{\boldsymbol{p}}$ を 1 粒子状態 $c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle$ と $d^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle$ に作用させたときにどうなるかを考えてみる。まず、$c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle$ の場合、生成消滅演算子の反交換関係を用いると、式 (60) の第 3 項のみが残ることになり、その項は

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{p}}c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle &= \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathrm{s,t},\boldsymbol{p}'} \frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}'}}c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\left(\delta_{\mathrm{r,t}}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} - c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})c_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{p}')\right)u^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\boldsymbol{p}}u_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{p}')\left|0\right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathrm{s}}\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p})u^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p})\sigma_{\boldsymbol{p}}u_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathrm{s}}(-1)^{\mathrm{r}+1\,\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p})u^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle} \\ &= \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathrm{s}}(-1)^{\mathrm{r}+1}\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}c^{\dagger}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{p})\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2}\delta_{\mathrm{r,s}}\left|0\right\rangle \\ &= (-1)^{\mathrm{r}+1}\frac{\hbar}{2}c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{61}$$

となる。$d^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle$ に作用させた場合は、第 2 項のみが残り、同様に計算できる。以上まとめると、

$$S_{\boldsymbol{p}}c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle = (-1)^{\mathrm{r}+1}\frac{\hbar}{2}c^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle \tag{62}$$

$$S_{\boldsymbol{p}}d^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle = (-1)^{\mathrm{r}+1}\frac{\hbar}{2}d^{\dagger}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})\left|0\right\rangle \quad \mathrm{r} = 1,2 \tag{63}$$

この式から、r=1 の解は運動量方向のスピン成分が正である右巻きの粒子、r=2 の解は運動量方向のスピンが負である左巻きの粒子に対応することがわかる。

ここで、粒子と反粒子の対称性を見てみよう。対称性はマヨラナ表現を用いると、はっきりと見える。マヨラナ表現においては、

$$\gamma_{\mathrm{M}}^{\mu *}=-\gamma_{\mathrm{M}}^{\mu}, \quad \mu=0,1,2,3 \tag{64}$$

が成立する。このことから、作用子

$$\left(\mathrm{i}\hbar\gamma_{M}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-mc\right) \tag{65}$$

は実であり、$\psi(x)$ が解のとき、その複素共役 $\psi^{*}(x)$ も解である。つまり、正エネルギー解が

$$u_{\mathrm{Mr}}(\boldsymbol{p})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}}{\sqrt{V}} \tag{66}$$

と書けるとき、

$$u_{\mathrm{Mr}}^{*}(\boldsymbol{p})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}}{\sqrt{V}} \tag{67}$$

も解であり、これが負エネルギーとなる。以上より、マヨラナ表現においては、

$$\psi_{\mathrm{M}}(x)=\sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^{2}}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{Mr}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}+d_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{Mr}}^{*}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \tag{68}$$

$$\psi_{\mathrm{M}}^{\dagger\mathrm{T}}(x)=\sum_{\mathrm{r}\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^{2}}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[d_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{Mr}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}+c_{\mathrm{r}}^{\dagger}(\boldsymbol{p})u_{\mathrm{Mr}}^{*}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\right] \tag{69}$$

この表式から、粒子と反粒子の対称性が明瞭に見て取れる。

最後に、Dirac 場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ の反交換関係をみてみよう。以下添え字の α、β は 4×4 行列の成分を表すとする。まず明らかに、

$$\left[\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}(y)\right]_{+}=\left[\bar{\psi}_{\alpha}(x),\bar{\psi}_{\beta}(y)\right]_{+}=0 \tag{70}$$

である。また、

$$\left[\psi_{\alpha}^{\pm}(x),\bar{\psi}_{\beta}^{\mp}(y)\right]_{+}=\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Delta}^{\pm}(x-y) \tag{71}$$

が成立する。以下でこれを示す。

まず、

$$\begin{aligned}\left[\psi_{\alpha}^{+}(x),\bar{\psi}_{\beta}^{-}(y)\right]_{+} &= \sum_{\mathrm{r,s},\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\frac{mc^{2}}{V}\frac{1}{(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'})^{1/2}} \\ &\qquad \left[c_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{p}),c_{\mathrm{s}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\right]_{+}u_{\mathrm{r}\alpha}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{s}\beta}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(px-p'y)}{\hbar}} \\ &= \sum_{\mathrm{r},\boldsymbol{p}}\frac{mc^{2}}{VE_{\boldsymbol{p}}}u_{\mathrm{r}\alpha}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{r}\beta}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \\ &= \sum_{\mathrm{r}}mc\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int\frac{\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{k}}{E_{\boldsymbol{p}}/c}u_{\mathrm{r}\alpha}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{r}\beta}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\end{aligned} \tag{72}$$

と展開できる。次に、積分の中身の $u_{\mathrm{r}\alpha}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{r}\beta}(\boldsymbol{p})$ を考える。u_{r} と v_{r} については、次の関係式が成り立つ。

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u_{\mathrm{r}} = 0, \quad \bar{u}_{\mathrm{r}}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \tag{73}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v_{\mathrm{r}} = 0, \quad \bar{v}_{\mathrm{r}}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0 \tag{74}$$

$$\sum_{\mathrm{r}} (u_{\mathrm{r}}\bar{u}_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{r}}\bar{v}_{\mathrm{r}}) = 1 \tag{75}$$

ここで、次式のように表される射影演算子 Λ^+ を導入する。

$$\Lambda^+ = \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \tag{76}$$

この演算子は、正エネルギー解 u_{r} のみを取り出す射影演算子である。実際、

$$\Lambda^+ u_{\mathrm{r}} = \frac{(\gamma^\mu p_\mu - mc)u_{\mathrm{r}} + 2mcu_{\mathrm{r}}}{2mc} = u_{\mathrm{r}}, \quad \Lambda^+ v_{\mathrm{r}} = 0 \tag{77}$$

この射影演算子を完全性関係式 (75) に左から作用させると、

$$\sum_{\mathrm{r}} u_{\mathrm{r}}\bar{u}_{\mathrm{r}} = \Lambda^+ \tag{78}$$

成分を明確に書くと、

$$\sum_{\mathrm{r}} u_{\mathrm{r}\alpha}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\mathrm{r}\beta}(\boldsymbol{p}) = \Lambda^+_{\alpha\beta} = \left(\frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}\right)_{\alpha\beta} \tag{79}$$

これを用いると、

$$\begin{aligned}
\left[\psi^+_\alpha(x), \bar{\psi}^-_\beta(y)\right]_+ &= mc\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{E_{\boldsymbol{p}}/c}\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}\right)_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{E_{\boldsymbol{p}}/c}\left(-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc\right)_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{E_{\boldsymbol{p}}/\hbar c}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \\
&= \mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}c}{2(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \\
&= \mathrm{i}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta}\Delta^+(x-y)
\end{aligned} \tag{80}$$

なお、途中で

$$\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} = k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{\hbar c} \tag{81}$$

を用いた。もう一方の反交換関係も同様に求められ、まとめると

$$\left[\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)\right]_+ = \mathrm{i}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\Delta^\pm(x-y) \tag{82}$$

とかける（行列成分の添え字は省略した）。今、

$$S^{\pm}(x) \equiv \left(\mathrm{i}\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^{\pm}(x-y) \tag{83}$$

とすると、

$$\left[\psi^{\pm}(x), \bar{\psi}^{\mp}(y) \right]_{+} = \mathrm{i}S^{\pm}(x) \tag{84}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \left[\psi(x), \bar{\psi}(y) \right]_{+} &= \left[\psi^{+}(x), \bar{\psi}^{-}(y) \right]_{+} + \left[\psi^{-}(x), \bar{\psi}^{+}(y) \right]_{+} \\ &= \mathrm{i}\left(S^{+}(x-y) + S^{-}(x-y) \right) \end{aligned} \tag{85}$$

また、

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv S^{+}(x) + S^{-}(x) \\ &= \left(\mathrm{i}\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \right) \left(\Delta^{+}(x) + \Delta^{-}(x) \right) \\ &= \left(\mathrm{i}\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta(x) \end{aligned} \tag{86}$$

とおくと、

$$\left[\psi(x), \bar{\psi}(y) \right]_{+} = \mathrm{i}S(x-y) \tag{87}$$

もう一つの表記

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k^2 - \mu^2} \tag{88}$$

を用いた場合を考える。このとき、

$$\begin{aligned} S^{\pm}(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{(\frac{p}{\hbar})^2 - (\frac{mc}{\hbar})^2} \left(\gamma^{\mu} k_{\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \hbar^2 \frac{1}{\hbar} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x}}{p^2 - m^2c^2} \left(\gamma^{\mu} p_{\mu} + mc \right) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hbar^3} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 p \frac{\gamma^{\mu} p_{\mu} + mc}{p^2 - m^2c^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x} \\ &= -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 p \frac{\gamma^{\mu} p_{\mu} + mc}{p^2 - m^2c^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x} \end{aligned} \tag{89}$$

途中、

$$\mu = \frac{mc}{\hbar} \tag{90}$$

$$k^{\mu} = \frac{p^{\mu}}{\hbar}, \quad \mathrm{d}^4 k = \frac{\mathrm{d}^4 p}{\hbar^4} \tag{91}$$

を用いた。最後に、

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} \pm mc)(\gamma^{\mu} p_{\mu} \mp mc) = p^2 - m^2c^2 \tag{92}$$

より、形式的に

$$S^{\pm}(x) = \frac{-\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{\mathrm{C}^{\pm}} \mathrm{d}^4 p \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x}}{\gamma^{\mu} p_{\mu} - mc} \tag{93}$$

とかける。