2.5.1 多重散乱におけるガウス近似

大きな角度で 1 度だけ散乱するという稀なケースを無視すると、ある標的に対する多重散乱の効果は、小さな角度におけるシングル散乱のみの分布によって考えることができる。この場合の確率分布はガウス近似により、

$$P(\theta) \approx \frac{2\theta}{\langle\theta^2\rangle} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle}\right) d\theta \tag{2.88}$$

と与えられる。ここで、$\langle\theta^2\rangle = \int_0^\infty \theta^2 P(\theta) d\theta$ であり、$\sqrt{\langle\theta^2\rangle}$ は多重散乱の角度分布を表している。Moliere 展開 (2.87) の第 1 項と (2.88) を比較すると (小さい角度で $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \approx 2\pi\theta d\theta$ であることを用いて)、$\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \approx \theta_1 \sqrt{B}$ となるが、Moliere 展開の全ての項を考慮するとこの値は発散してしまう。これを防ぐ、より良い実験的な式が Lynch と Dahl によって以下のように提唱された。

$$\langle\theta^2\rangle = 2\frac{{\chi_c}^2}{1+F^2}\left[\frac{1+v}{v}\ln(1+v) - 1\right]\mathrm{rad}^2 \tag{2.89}$$

ここで、

$$\begin{aligned} v &= 0.5\frac{\Omega}{1-F} \\ \Omega &= \frac{{\chi_c}^2}{{\chi_a}^2} \\ {\chi_c}^2 &= 0.157z\left(\frac{Z(Z+1)}{A}\right)\frac{x}{p^2\beta^2} \\ {\chi_a}^2 &= 2.007\times10^{-5} Z^{2/3}[1+3.34(Zz\alpha/\beta)^2]/p^2 \end{aligned}$$

である。p は入射粒子の運動量 (MeV/c), x は経路長 (g/cm^2), z は入射粒子の電荷、Z と A は標的の原子番号と原子量、α は微細構造定数である。また、F は Moliere 展開を考慮した補正を表すパラメータで、$\langle\theta^2\rangle$ の値が発散しないように 1 より小さい値をとる。同様に Ω もパラメータで、平均散乱数と解釈される。F が $0.90 \sim 0.995$,$20 < \Omega < 10^8$ なら、上式は 2%より良い収率 (? "yield") となる（いい精度になるということ）。

(2.89) を用いると、Fig2.15 の 2 つのガウス分布の標準偏差を計算することができる。15.7MeV の電子では、

$$\langle\theta^2\rangle = \begin{cases} 0.0023\ \mathrm{rad}^2 & x = 18.66\ \mathrm{mg/cm}^2 \\ 0.0051\ \mathrm{rad}^2 & x = 37.28\ \mathrm{mg/cm}^2 \end{cases}$$

である。(2.88) をガウス分布と比較すると、$\sigma = \sqrt{\langle\theta^2\rangle/2}$ であり、上の場合でそれぞれ $\sigma = 1.94^\circ,\ 2.89^\circ$ となり、これらの値は Fig.2.15 によく一致している。

また、よく用いられる量として、入射粒子の軌跡を含む垂直な面へ射影した角度 (θ_x, Fig.2.14 参照) で表したものがある。ここでも分布はガウス近似され、

$$P(\theta_x)d\theta_x = (2\pi \langle {\theta_x}^2 \rangle)^{-1/2} \exp\left(\frac{-{\theta_x}^2}{2 \langle {\theta_x}^2 \rangle}\right) d\theta_x \tag{2.90}$$

であり、射影された散乱角の 2 乗平均 $\langle {\theta_x}^2 \rangle$ は、立体散乱角 $\langle \theta^2 \rangle$ と $\langle {\theta_x}^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle /2$ の関係にある。

Fig.2.14 から、入射粒子の側面への変位もあることが分かる。これは大抵非常に小さいが、この分布を計算すると、

$$P(r)dr = 6r(\langle \theta^2 \rangle t^2)^{-1} \exp\left(\frac{-3r^2}{\langle \theta^2 \rangle t^2}\right) dr \tag{2.91}$$

となる。ここで、r : 変位、$t = x/L_{\mathrm{rad}}$: 放射長に対する厚み、である。ガウス分布と比較すると、平均 2 乗変位は、

$$\langle r^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle t^2/3 \tag{2.92}$$

である。ここで偶然にも放射長が出てきたが、これはもちろん多重散乱に限ったものではない。

2.5.2　低エネルギー電子の後方散乱

電子はその質量が非常に小さく、それゆえ原子核からの散乱において大きな角度への振れが起こりやすい。この事象が起こる可能性はとても高く、実は電子の多重散乱はその方向を全く変えてしまいうるので、標的から後方散乱して飛び出ていってしまうこともままある。これを Fig.2.16 に図式化した。この効果は特に電子のエネルギーが低いほど、また標的の原子番号が大きいほど強く表れる。そしてまた、入射角にも依存する：標的の表面に対して斜めに入射した電子は明らかに垂直に入射した時と比べて後方散乱の可能性がグッと上がっている。

入射電子の数に対して後方散乱する電子の数の割合を “後方散乱係数” や “アルベド” と呼ぶ。Fig.2.17 は様々な標的に対し、様々なエネルギーの電子を入射した時の係数を測定したものである。後方散乱という事象は入射粒子のエネルギーと幾何的配置に左右される検出器において重要なファクターであり、この係数が大きすぎると検出器が信号としてとらえる前に散乱して出て行ってしまう。例えば標的に対して垂直に入射されなかった電子は、Z の大きい標的 (NaI など) においてその 80%が後方に跳ね返されるのだ。

2.6　エネルギー損失分布

我々は主に、荷電粒子がある厚みを持った標的を通過するときの平均エネルギー損失について述べてきた。しかし、一般には衝突回数や衝突時のエネ

ルギー損失には統計的な揺らぎがあるため、実際の粒子におけるエネルギー損失はこの平均値と一致しない。エネルギー一定のビームを撃ち込んだとしても、決まった厚みを持つ標的中を通過すると dE/dx の式から計算される平均エネルギー損失よりも低い位置に鋭いピークを持つ分布となるのだ。実は既にこれらのエネルギー損失の揺らぎは見てきており、これと同じ問題を別の角度から議論してきていたのだ。つまり、決まった厚みを持つ標的でのエネルギー損失のゆらぎを見る代わりに、決まったエネルギー損失に対しどれだけ飛程するかのゆらぎを見てきたのだ。

理論的観点からして、ある標的の厚さに対してのエネルギー損失の分布を計算するのは数学的に難しい問題であるので、一般に 2 つのケース、標的が薄いときと厚いときとに分けて考えていく。

2.6.1 厚いとき（ガウス極限）

相対論的振る舞いの粒子について考える。厚い標的中においては衝突回数が多くなるため、エネルギー損失の分布はガウス分布になることが示唆される。これは中心極限定理によるもので、互いに独立な同じ統計分布に従う N コの事象の標本平均の分布は $N \to \infty$ において正規分布 (ガウス分布) へと収束する、というものである。1 回の原子との衝突によって失うエネルギーを独立な量 δE とし、入射粒子の速度の変化がそれぞれの衝突におけるエネルギー損失に対し無視できる (つまり、速度に依存する cross-section が一定) とすると、全エネルギー損失は δE の和で表されるだろう。衝突回数 N が十分大きいとき、エネルギー損失の分布は以下のガウス分布となる。

$$f(x, \Delta) \propto \exp\left(\frac{-(\Delta - \overline{\Delta})^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.93}$$

ここで、x : 標的の厚み、Δ : 標的中でのエネルギー損失、$\overline{\Delta}$: 平均エネルギー損失、σ : 標準偏差である。

また、非相対論的な重い粒子においては、ガウス分布の幅 σ_0 は Bohr によって、

$${\sigma_0}^2 = 4\pi N_{\rm a} {r_{\rm e}}^2 (m_{\rm e}c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x = 0.1569 \rho \frac{Z}{A} x [\mathrm{MeV}^2] \tag{2.94}$$

と求められている。ここで、$N_{\rm a}$:アボガドロ数、$r_{\rm e}$:古典電子半径 $(= e^2/4\pi\epsilon_0 m_{\rm e} c^2)$、$m_{\rm e}$: 電子の質量、ρ, Z, A : 標的の密度、原子番号、原子量である。上式は相対論的粒子に対しての拡張が行え、その際標準偏差は以下のように関係づけられる。

$$\sigma^2 = \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}{1 - \beta^2} {\sigma_0}^2 \tag{2.95}$$

2.6.2　とても厚いとき

上の解析において最も重要な仮定は、エネルギー損失が入射時のエネルギーに比べて小さいので、粒子の速度の変化が無視できるということであった。もちろん、とても厚い標的に対しては多くのエネルギーを失っていくため、この仮定は破綻する。この場合における分布については Tschalar 及び Bichsel が詳しく取り扱っている。