2.3　Cherenckov 放射

Cherenkov 放射とは

Cherenkov 放射は荷電粒子が媒質中の光速よりも速く運動したときに起こる。その下限の速さは

$$\beta c = v = \frac{c}{n} \tag{2.55}$$

n は反射係数、c は真空の光速。つまり Cherenkov 放射の起きる条件は

$$v_{\text{particle}} > \frac{c}{n} \tag{2.56}$$

であって、このとき飛行機が衝撃波を作るように、電磁衝撃波が生じる。波面は円錐をなし、粒子の速度方向から測った放射電磁波の角度は

$$\cos\theta_c = \frac{vt}{\frac{c}{n}t} = \frac{1}{\beta n(\omega)} \tag{2.57}$$

この角度は粒子の速度と放射の角振動数によることに注意。

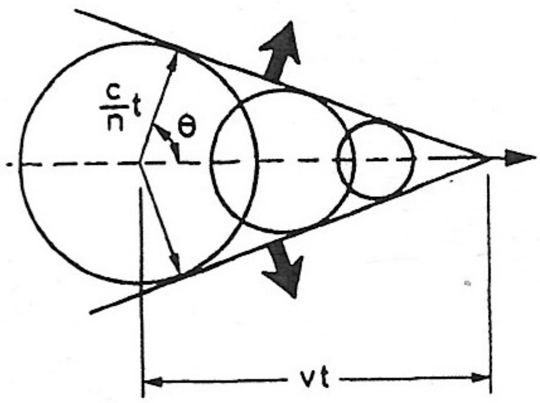

図 1: Cherenkov 放射の波面

Cherenkov 放射によるエネルギー損失

無限の長さの媒質での記述は簡単。しかし、より現実的な状況は有限の厚さの媒質である。この場合計算が難しくなるが、一応古典電磁気のみで対処可能。電荷 ze の粒子が厚さ L の媒質に均一にまっすぐ入射するとき、角振動数あたり、立体角あたりの放射されるエネルギーは

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}n\beta^2\sin^2\theta\left|\frac{\omega L}{2\pi\beta c}\frac{\sin\xi(\theta)}{\xi(\theta)}\right|^2 \tag{2.58}$$

α は微細構造定数、$\xi(\theta)$ は

$$\xi(\theta) = \frac{\omega L}{2\beta c}(1 - \beta n\cos\theta) \tag{2.59}$$

$\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2$ の項は Fraunhofer 回折（十分遠くから見た回折）を表す（2 次元）。Cherenkov 放射は回折と似ている。中心に最大ピークがあって、それより小さい極大値が続く。

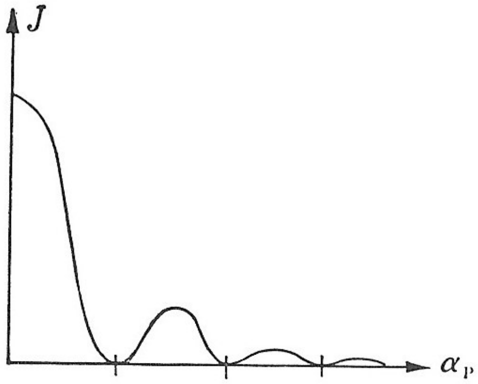

図 6. 10　回折波の強度の角分布

図 2: 参考：Fraunhofer 回折の強度の角度依存性

放射の波長に対して厚さが十分大きいとき、この項はデルタ関数 $\delta(1-\beta n\cos\theta)$ のように振る舞う。これは Cherenkov 放射の角度の表式 (2.57) を要請する。速度に関する条件は Cherenkov 角 θ_c が物理的意味を持つ（$\cos\theta_c \le 1$）条件である。

L が大きくなると、中心の鋭いピークが広がってくるので、放射は中心 θ_c に対称に広がる。一般に n は角振動数に依るので、放射の角度も角振動数に依存することに注意。角振動数がそろっていないと、放射の角は広がっていく。

立体角、角振動数で積分して L で割ると、媒質の単位長さ当たりのエネルギー放射が求められる（難しい積分？）。まず、角振動数あたりのエネルギー損失は

$$-\frac{dE}{d\omega} = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\omega L\sin^2\theta_c \tag{2.60}$$

よって、単位長さあたりのエネルギー損失は

$$-\frac{dE}{dx} = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\int\omega d\omega\sin^2\theta_c = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\int\omega d\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \tag{2.61}$$

角振動数の積分は $\beta > \frac{1}{n(\omega)}$ の範囲で行い、L は波長に比べて十分大きいとした。この表式よりエネルギー損失は β とともに大きくなることが分かる。相対論的領域では、衝突のエネルギー損失に比べると小さい。実は、密度の高い媒質では放射エネルギーは 10^{-3} MeVcm^{2}g^{-1} のオーダーで、これは衝突のエネルギーと比べて無視できる。媒質が気体の場合では大きくなり、およそ $0.01-0.2$ MeVcm^{2}g^{-1} だが、これも十分無視できる。実は Cherenkov 放射は $\frac{dE}{dx}$ を計算すると自然に出てくるもので、Bethe-Bloch の式にはすでに含まれている。

検出器への利用

こうした特性は Cherenkov カウンターとして利用されている。このデバイスは粒子の速度の最も正確な測定法であって、高エネルギー実験では広く使われる（構造は [2.11] 参照？）。この検出器は媒質を通って粒子として放射される光子の数を測定する。単位長さ、振動数あたりの光子の数は、式 (2.60) を L と $\hbar\omega$ で割ればよい。

$$\frac{d^2N}{d\omega dx} = \frac{z^2\alpha}{c}\sin^2\theta_c = \frac{z^2\alpha}{c}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \tag{2.62}$$

波長を用いると

$$\frac{d^2N}{d\lambda dx} = \frac{2\pi z^2\alpha}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)}\right) \tag{2.63}$$

多くの Cherenkov 検出器では、光子をパルス電流に変換する光電子増倍管によって Cherenkov 放射を検出する。その検出できる範囲は 350 − 550 nm だから、検出できる単位長さあたりの光子数は

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi z^2\alpha\sin^2\theta_c\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\lambda} = 475z^2\sin^2\theta_c\ [\text{photons/cm}] \tag{2.64}$$

であって、あまり大きな量ではない。