



$$i e_0^2 \Sigma(p) \equiv \frac{(i e_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k i \tilde{D}_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i \tilde{S}_F(p-k) \gamma^\beta \quad (9.4)$$

$$= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{-\partial_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{\not{p} - \not{k} + m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma^\beta$$

$$= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (9.20)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$$

\*  $\Sigma(p)$  は  $4 \times 4$  行列である。  
単位行列を  $\epsilon$  は  $\epsilon$  は略す。

• 正則化

$\Sigma(p)$  は  $k \rightarrow 0$  の赤外発散、 $k \rightarrow \infty$  の紫外発散。

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \xrightarrow{\text{正則化}} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \quad \left( \begin{array}{l} \lambda \rightarrow 0 \\ \Lambda \rightarrow \infty \end{array} \right)$$

• 恒等式

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots, \quad \frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

(A, B は任意の演算子、非可換でもよい。)

• 電子の質量の繰り込み

$$i \tilde{S}_F(p) \xrightarrow{\text{補正}} i \tilde{S}_F(p) + i \tilde{S}_F(p) i e_0^2 \Sigma(p) i \tilde{S}_F(p) \xrightarrow{\text{恒等式}} \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^4) \quad (9.24)$$

D-ルイン変性より、 $\Sigma(p) \equiv A + (\not{p} - m) B + (\not{p} - m) \Sigma_c(p)$  と展開。  $\leftarrow p^2 = \not{p} \not{p} = \not{p} \not{p}$

•  $\Sigma_c(p)$  は  $(\not{p} - m)$  の1次に比例する。  
•  $\Lambda \rightarrow \infty$  の極限で、A, B は発散し、 $\Sigma_c(p)$  は有限。

極限  $p^2 = m^2$ ,  $m \equiv m_0 + \delta m$  とする、 $\delta m = -e_0^2 A$  ( $\because \not{p} = m$  のとき  $\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) = 0$ ,  $A = \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ )

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} = \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B) + e_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p) + i\epsilon} \quad (9.29)$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \cdot (1 - e_0^2 B - e_0^2 \Sigma_c(p)) + \mathcal{O}(e_0^4) \quad (9.30)$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

• 電子の質量の繰り込み 別解

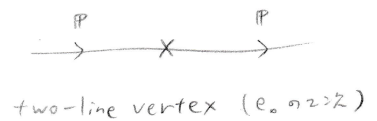
QED のヒルベルト密度  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$

$$\mathcal{L}_0 = -\vec{A}_\mu(x) \vec{A}^\mu(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x)) + i \bar{\psi}^t(x) \not{\partial} \psi(x) - \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - m) \psi(x)$$

(電磁場) (Dirac 場) 物理的な質量

$$\mathcal{L}_I = -e_0 \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) - \delta m \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

(相互作用) mass counterterm (質量相殺項)



$m_0$  ははじめから物理的な質量  $m$  に直し、two-line vertex には因子  $\delta m \equiv -e_0^2 A$  を充てる。(再確認)

2次のファインマン振幅

(1次は不可能)



電子の自己エネルギー  
(mass counterterm方法)



$$\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} + \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} e_0^2 \left\{ \overset{\uparrow}{\Sigma(p)} A' + (\not{p}-m) B' + (\not{p}-m) \Sigma_c'(p) \right\} \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} + \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} (i\delta m) \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}$$

↑  
-ie\_0^2 A' とすればよい

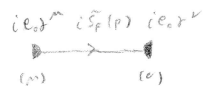
$$= i \left[ \frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon} - \frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon} e_0^2 (\not{p}-m) (B' + \Sigma_c'(p)) \frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon} \right] \quad \text{恒等式}$$

$$= \frac{i}{(\not{p}-m)(1+e_0^2 B') + e_0^2 (\not{p}-m) \Sigma_c'(p) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^4) \quad (9.34)$$

(9.29) と (9.34) は  $e_0$  の 2 次まで  $z=1$  一致する。  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$  は共通なので、この方法でも同じ結果を与える。

• 電荷の繰り込み  $Z_2$

電子の伝播関数 (因子  $i\tilde{S}_F(p)$ ) の両端には、頂点 (因子  $ie_0 \gamma^\mu$ ) がある。



$$\frac{ie_0}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{ie_0}{\not{p}-m+i\epsilon} \cdot \left( 1 - e_0^2 B - e_0^2 \Sigma_c(p) + \mathcal{O}(e_0^4) \right)$$

↑  
2-1 項 2 次散

\*  $z=2, z=1$  の精度の Feynman 図式変形を議論する。

$$e \equiv e_0 (1 - e_0^2 B) + \mathcal{O}(e_0^6) \quad , \quad e \equiv Z_2 e_0 \quad , \quad Z_2 = 1 - e_0^2 B + \mathcal{O}(e_0^4) \quad \text{のように繰り込む。}$$

9.2 節と同様に、 $Z_2$  について  $e_0 = e [1 + \mathcal{O}(e^2)]$

$$\therefore \frac{ie_0}{\not{p}-m_0+i\epsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{ie}{\not{p}-m+i\epsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + \mathcal{O}(e^6) \quad (9.36)$$