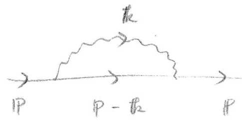
9.3 電子の自己エネルギー　　高橋 樹


$i\tilde{S}_F(p)$ $\Longrightarrow$  $i\tilde{S}_F(p)\, ie_0^2\Sigma(p)\, i\tilde{S}_F(p)$

$$ie_0^2\Sigma(p) \equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\, i\tilde{D}_{F\alpha\beta}(k)\gamma^\alpha i\tilde{S}_F(p-k)\gamma^\beta \qquad (9.4)$$

$$= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}\gamma^\alpha \frac{\not p-\not k+m_0}{(p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon}\gamma^\beta$$

← $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$、$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$

$$= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2+i\varepsilon}\frac{2\not p-2\not k-4m_0}{(p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon} \qquad (9.20)$$

※$\Sigma(p)$は4×4行列である。単位行列をしばしば略す。

・正則化

$\Sigma(p)$は $k\to0$ で赤外発散、$k\to\infty$ で紫外発散。

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon} \xrightarrow{正則化} \frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix}\lambda\to0\\ \Lambda\to\infty\end{pmatrix}$$

・恒等式

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} - \cdots \quad、\quad \frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \cdots$$

(A,Bは任意の演算子、非可換でもよい。)

・電子の質量の繰り込み

$$i\tilde{S}_F(p) \longrightarrow i\tilde{S}_F(p) + i\tilde{S}_F(p)\, ie_0^2\Sigma(p)\, i\tilde{S}_F(p)$$

$$\frac{1}{\not p-m_0+i\varepsilon} \xrightarrow{補正} \frac{1}{\not p-m_0+i\varepsilon} + \frac{i}{\not p-m_0+i\varepsilon}ie_0^2\Sigma(p)\frac{i}{\not p-m_0+i\varepsilon} \overset{恒等式}{=} \frac{i}{\not p-m_0+e_0^2\Sigma(p)+i\varepsilon} + O(e_0^4) \qquad (9.24)$$

ローレンツ不変性から、$\Sigma(p) \equiv A + (\not p-m)B + (\not p-m)\Sigma_c(p)$ と展開。 ← $p^2 = p_\mu p^\mu = \not p\not p$

・$\Sigma_c(p)$は$(\not p-m)$の1次に比例する。

・$\Lambda\to\infty$ の極限で、A,Bは発散し、$\Sigma_c(p)$は有限。

極を $p^2=m^2$、$m\equiv m_0+\delta m$ とすると、$\delta m = -e_0^2A$ ($\because$ $\not p=m$のとき $\not p-m_0+e_0^2\Sigma(p)=0$、$A=\Sigma(p)|_{\not p=m}$)

$$\frac{i}{\not p-m_0+e_0^2\Sigma(p)+i\varepsilon} = \frac{i}{(\not p-m)(1+e_0^2B)+e_0^2(\not p-m)\Sigma_c(p)+i\varepsilon} \qquad (9.29)$$

$$= \frac{i}{\not p-m+i\varepsilon}\cdot\left(1-e_0^2B-e_0^2\Sigma_c(p)\right) + O(e_0^4) \qquad (9.30)$$

$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1-\varepsilon+O(\varepsilon^2)$

・電子の質量の繰り込み 別解

QEDのハミルトニアン密度 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$

$$\mathcal{H}_0 = -\dot{A}_\nu(x)\dot{A}^\nu(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu(x))(\partial^\mu A^\nu(x)) + i\psi^\dagger(x)\dot\psi(x) - \bar\psi(x)(i\not\partial - m)\psi(x)$$

(電磁場)　(Dirac場)　物理的な質量

$$\mathcal{H}_I = -e_0\bar\psi(x)\not A(x)\psi(x)\ \boxed{-\delta m\,\bar\psi(x)\psi(x)}$$

(相互作用)　mass counterterm (質量相殺項)

two-line vertex (e_0の2次)

m_0をはじめから物理的な質量mに直し、two-line vertexには因子 $\boxed{i\delta m \equiv -ie_0^2A}$ を充てる。(要確認)

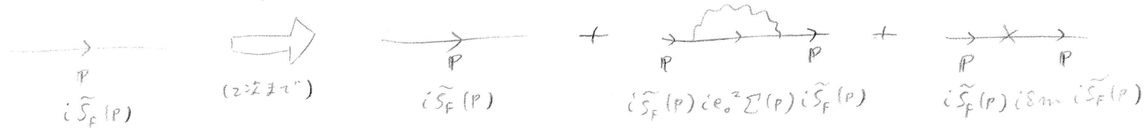
2次のファインマン振幅

(1次は不可能)

 + 

$\bar u(p)\, ie_0^2\Sigma(p)\, u(p)$ 　　 $\bar u(p)\, i\delta m\, u(p)$

・電子の自己エネルギー
(mass counterterm の方法)



$$\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} + \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\, ie_0^2 \underbrace{\left\{ A' + (\not p - m)B' + (\not p - m)\Sigma_c'(p) \right\}}_{\Sigma(p)} \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} + \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} \underbrace{(i\delta m)}_{-ie_0^2 A' \text{とすればよい}} \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}$$

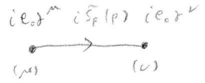
$$= i\left[\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\, e_0^2 (\not p - m)\left(B' + \Sigma_c'(p)\right) \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon} \right]$$

恒等式

$$= \frac{i}{(\not p - m)(1 + e_0^2 B') + e_0^2 (\not p - m)\Sigma_c'(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \qquad (9.34)$$

(9.29) と (9.34) は e_0 の2次までで一致する。$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$ は共通なので、どちらの方法でも同じ結果を与える。

・電荷の繰り込み　Z_2



電子の伝播関数 (因子 $i\tilde{S}_F(p)$) の両端には、頂点 (因子 $ie_0\gamma^\mu$) がある。

$$\frac{ie_0^2}{\not p - m_0 + i\varepsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{ie_0^2}{\not p - m + i\varepsilon} \cdot \left(1 - \underbrace{e_0^2 B}_{\Lambda\to\infty\text{で発散}} - e_0^2 \Sigma_c(p) + O(e_0^4)\right)$$

※ 2次までの精度のファインマン図と式変形で議論する。

$e^2 \equiv e_0^2(1 - e_0^2 B) + O(e_0^6)$ 、 $e^2 = Z_2 e_0^2$ 、 $Z_2 = 1 - e_0^2 B + O(e_0^4)$ のように繰り込む。

9.2節と同様に、Z_2 についても $e_0 = e\left[1 + O(e^2)\right]$

$$\therefore \quad \frac{ie_0^2}{\not p - m_0 + i\varepsilon} \xrightarrow{\text{補正}} \frac{ie^2}{\not p - m + i\varepsilon}\left[1 - e^2 \Sigma_c(p)\right] + O(e^6) \qquad (9.36)$$