16.7 ニュートリノの質量

髙橋 樹

ここでは、ニュートリノの質量が0でない場合の現象について考察する。

16.7.1 ニュートリノ振動

・混合行列

フレーバー固有状態 ($\ell = e, \mu, \tau$) は、質量固有状態 ($i = 1, 2, 3$) の線形結合（ユニタリ）で与えられる。

$$\nu_\ell = \sum_i U_{\ell i} \nu_i \quad \cdots \text{Pontecorvo・牧・中川・坂田行列}$$

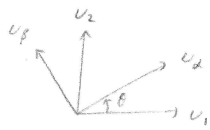
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} s_{12} = \sin\theta_{12} \\ c_{12} = \cos\theta_{12} \end{array} \text{等.} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} c_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

実験値　$\theta_{12} \approx 34^\circ$、$\theta_{23} \approx 45^\circ$、$\theta_{13} \approx 8^\circ$、$\delta \approx 256^\circ$　（θ_{13}, δ はまだ不確実）

$$|m_2^2 - m_1^2| \approx 7.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2, \quad |m_3^2 - m_1^2| \approx |m_3^2 - m_2^2| \approx 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$$

・ニュートリノ反転



2世代混合で近似できる事がある。

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle, \quad |\nu_\beta\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle$$

$t = 0$ で運動量 $\mathbb{P}$ ($|\mathbb{P}| \gg m_i$) の ν_α ビームが生成したとき、

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-iE_1 t} \cos\theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t} \sin\theta |\nu_2\rangle \qquad \left(E_i = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m_i^2} \simeq |\mathbb{P}| + \frac{m_i^2}{2|\mathbb{P}|} \right)$$

時刻 t に ν_β として観測される確率は、

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 \simeq \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4|\mathbb{P}|} t \right)$$

$$\simeq \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} L \right) \qquad \left(E = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m_\alpha^2} \simeq |\mathbb{P}|, \ L = \frac{|\mathbb{P}| c}{E} t \simeq t \right)$$

・ラグランジアン密度（混合有り）

$$\Psi_{\nu_\ell} = \sum_j U_{\ell j} \Psi_j, \quad \mathcal{L}_0 = \sum_j \bar{\Psi}_j (i\partial\!\!\!/ - m_j) \Psi_j = \sum_\ell \bar{\Psi}_{\nu_\ell} i\partial\!\!\!/ \Psi_{\nu_\ell} - \sum_{\ell, \ell'} \bar{\Psi}_{\nu_\ell} \left(\sum_j U_{\ell j} m_j U^\dagger_{j \ell'} \right) \Psi_{\nu_{\ell'}}$$

16.7.2 Dirac ニュートリノか Majorana ニュートリノか？

ニュートリノ混合は無視し、1種類のニュートリノだけを考える。

・Majorana 表現

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$、$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}$、$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$、$\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$、$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$ はすべて純虚数。

Dirac eq. $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ は実数係数の方程式となり、ψ が解ならば ψ^* も解である。

・場の演算子の平面波展開（Majorana 表現）

Dirac 粒子
$$\psi(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right]$$
$$\psi^{\dagger T}(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[d_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right]$$
4つの状態 $\nu_+, \nu_-, \bar{\nu}_+, \bar{\nu}_-$

Majorana 粒子 … $\psi(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] = \psi^{\dagger T}(x)$

2つの状態 $\nu_+^{(M)}, \nu_-^{(M)}$

中性粒子では、粒子と反粒子が同一の可能性がある。

・射影演算子

ヘリシティ射影演算子 $\Pi_\pm(\mathbf{p}) = \frac{1 \pm \sigma_{\mathbf{p}}}{2}$、$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$、$\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$

$\Pi_+ u_r = \delta_{1r} u_r$、$\Pi_- u_r = \delta_{2r} u_r$、$\Pi_+ v_r = \delta_{2r} v_r$、$\Pi_- v_r = \delta_{1r} v_r$　（$r = 1, 2$、引数はすべて $\mathbf{p}$）

ヘリシティ　正(+)　負(−)

カイラリティ射影演算子 $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$、$P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$

$m \to 0$ 極限で、$\Pi_+ \to P_R$、$\Pi_- \to P_L$ に一致する。

公式 $(\gamma^5)^2 = 1$、$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$、$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ $\Rightarrow$ $P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$、$P_R\gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$

正確に $m_\nu = 0$ のとき、$\nu_-, \bar{\nu}_+$ と $\nu_-^{(M)}, \nu_+^{(M)}$ を実験によって区別することはできない。

・レプトン数の保存

$\mathcal{H}_I = g_W J^{\alpha\dagger} W_\alpha + g_W J^\alpha W_\alpha^\dagger$、$J^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \psi_{\nu_e}$、$J^{\alpha\dagger} = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \psi_e$

Dirac 粒子　$N_e = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$

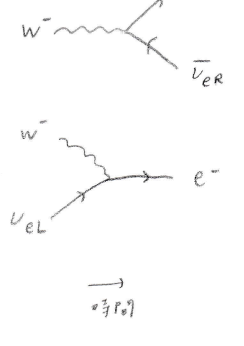
Majorana 粒子　$N_e^{(M)} = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_{e-}^{(M)}) - N(\nu_{e+}^{(M)})$ ← $m_\nu = 0$ のとき保存する。

・二重β崩壊

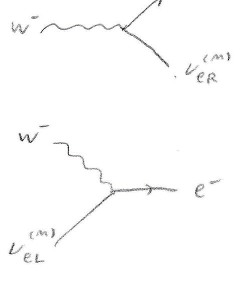
2ν モード $(Z, A) \longrightarrow (Z+2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$ …… Dirac でも Majorana でも許容

0ν モード $(Z, A) \longrightarrow (Z+2, A) + 2e^-$ …… Majorana かつ $m_\nu \neq 0$ のときのみ許容

○ Dirac で可能

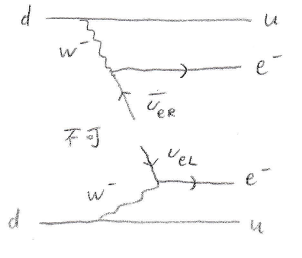


○ Majorana で可能



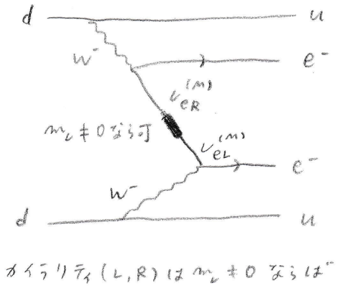
0ν モードのファインマン図

○ Dirac ニュートリノ



レプトン数保存を破っている。

○ Majorana ニュートリノ



カイラリティ(L, R)は $m_\nu \neq 0$ ならば保存量ではない。