

9.7 赤外発散

8.8,8.9 節まとめ：

電子が外場に散乱を受けて弾性散乱をするとき、必ず低エネルギーの光子の放出 (制動放射) を伴う。それぞれの計算に現れる発散は打ち消しあって結局有限の値が観測される。これを確認しよう。vertex 補正

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha \quad (9.48)$$

に発散を回避するための手法

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)} \quad (9.21)$$

を適用すると

$$e^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} f(k) \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \quad (9.92)$$

但し

$$f(k) \equiv \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (9.93)$$

今、 $k \rightarrow 0$ のときを考えたい。このとき $f(k)$ は $k \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$ で 1 になるから、これを無視する。また、分子について

$$\begin{aligned} (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}) &= \left\{ (-\gamma_\alpha \gamma_\beta + 2g_{\beta\alpha}) p^\beta - \not{k} + m \right\} u(\mathbf{p}) \quad (\because \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}) \\ &= \left\{ \gamma_\alpha (-\not{p} + m) + 2p_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha \right\} u(\mathbf{p}) \\ &= (2p_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) u(\mathbf{p}) \quad (\because (\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0) \end{aligned}$$

分母について

$$\begin{aligned} (\not{p} - \not{k})^2 - m^2 &= p^2 - 2pk + k^2 - m^2 \\ &= -2pk + k^2 \quad (\because p^2 = m^2) \end{aligned}$$

などとしてそれぞれ k の最低次をとれば

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left[\int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \frac{(pp')}{(p'k)(pk)} + \dots \right] \quad (9.94)$$

\dots は $\lambda \rightarrow 0$ としたときに $k \rightarrow 0$ で有限の項を表す。残った項の積分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} &\equiv \text{P} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - i\pi \delta(k^2 - \lambda^2) \\ &= \text{P} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{i\pi}{2\omega_\lambda} [\delta(k^0 - \omega_\lambda) + \delta(k^0 + \omega_\lambda)] \quad (9.95) \end{aligned}$$

ただし $\omega_\lambda \equiv (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{\frac{1}{2}}$ 。 k^0 について積分し、有限な主値積分を無視すれば

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) A(p', p) + \dots \quad (9.96a)$$

ここに

$$A(p', p) \equiv \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_\lambda} \frac{(p' p)}{(p' k)(p k)} \quad (9.96b)$$

繰りこまれた (有限な) 部分は

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda_c^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') [\Lambda^\mu(p', p) - L \gamma^\mu] u(\mathbf{p}) \quad (9.97)$$

で定義され (9.53)、その性質 (自由粒子?)

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda_c^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = 0 \quad (9.54)$$

より

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) L \gamma^\mu u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{p}) A(p, p) \quad (9.98)$$

p, p' について対称なので

$$L = A(p, p) + \dots = A(p', p') + \dots \quad (9.99)$$

以上より

$$\begin{aligned} e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda_c^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left\{ A(p', p) - \frac{1}{2} A(p', p') - \frac{1}{2} A(p, p) \right\} + \dots \\ &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left\{ \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p' k} - \frac{p}{p k} \right]^2 \right\} + \dots \end{aligned}$$

電子の弾性散乱の Feynman 振幅は $A_{e\mu}$ を掛けることで得られる (9.67) :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \left\{ 1 + \frac{e^2}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p' k} - \frac{p}{p k} \right]^2 \right\} + \dots \quad (9.100)$$

\mathcal{M}_0 は最低次の振幅を表し

$$\mathcal{M}_0 = ie \bar{u}(\mathbf{p}') \not{A}_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}')$$

よって断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{El}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p' k} - \frac{p}{p k} \right]^2 \right\} + \dots \quad (9.101)$$

(8.106), (8.107) (もしくは $\lambda \rightarrow 0$ として (8.110)) と比較すれば制動放射の発散ちょうど打ち消しあうことが分かる。これは高次の項でも同じ。