9.7　赤外発散

8.8,8.9 節まとめ：

電子が外場に散乱を受けて弾性散乱をするとき、必ず低エネルギーの光子の放出 (制動放射) を伴う。それぞれの計算に現れる発散は打ち消しあって結局有限の値が観測される。これを確認しよう。vertex 補正

$$\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}'-\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma_\alpha \tag{9.48}$$

に発散を回避するための手法

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon} \to \frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon} = \frac{\lambda^2-\Lambda^2}{(k^2-\lambda^2+i\varepsilon)(k^2-\Lambda^2+i\varepsilon)} \tag{9.21}$$

を適用すると

$$e^2\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} f(k) \frac{\gamma^\alpha(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma^\mu\left(\not{p}-\not{k}+m\right)\gamma_\alpha}{[(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon][(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]} \tag{9.92}$$

但し

$$f(k) \equiv \frac{\lambda^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon} \tag{9.93}$$

今、$k\to 0$ のときを考えたい。このとき $f(k)$ は $k\to 0, \lambda\to 0, \Lambda\to\infty$ で 1 になるから、これを無視する。また、分子について

$$\begin{aligned}
(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}) &= \left\{(-\gamma_\alpha\gamma_\beta + 2g_{\beta\alpha})p^\beta - \not{k}+m\right\}u(\boldsymbol{p}) \quad (\because\ \{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}) \\
&= \left\{\gamma_\alpha(-\not{p}+m)+2p_\alpha - \not{k}\gamma_\alpha\right\}u(\boldsymbol{p}) \\
&= (2p_\alpha - \not{k}\gamma_\alpha)\,u(\boldsymbol{p}) \quad (\because\ (\not{p}-m)u(\boldsymbol{p})=0)
\end{aligned}$$

分母について

$$\begin{aligned}
(p-k)^2-m^2 &= p^2-2pk+k^2-m^2 \\
&= -2pk+k^2 \quad (\because\ p^2=m^2)
\end{aligned}$$

などとしてそれぞれ k の最低次をとれば

$$e^2\bar{u}(\boldsymbol{p}')\Lambda^\mu(p',p)u(\boldsymbol{p}) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu u(\boldsymbol{p})\left[\int\frac{d^4k}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}\frac{(pp')}{(p'k)(pk)}+\cdots\right] \tag{9.94}$$

$\cdots$ は $\lambda\to 0$ としたときに $k\to 0$ で有限の項を表す。残った項の積分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} &\equiv \mathrm{P}\frac{1}{k^2-\lambda^2} - i\pi\delta(k^2-\lambda^2) \\
&= \mathrm{P}\frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{i\pi}{2\omega_\lambda}\left[\delta(k^0-\omega_\lambda)+\delta(k^0+\omega_\lambda)\right]
\end{aligned} \tag{9.95}$$

ただし $\omega_\lambda \equiv (\lambda^2 + \boldsymbol{k}^2)^{\frac{1}{2}}$。$k^0$ について積分し、有限な主値積分を無視すれば

$$e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \Lambda^\mu (p', p) u(\boldsymbol{p}) = e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) A(p', p) + \cdots \tag{9.96a}$$

ここに

$$A(p', p) \equiv \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_\lambda} \frac{(p'p)}{(p'k)(pk)} \tag{9.96b}$$

繰りこまれた (有限な) 部分は

$$e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \Lambda^\mu_c (p', p) u(\boldsymbol{p}) = e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \left[\Lambda^\mu (p', p) - L\gamma^\mu \right] u(\boldsymbol{p}) \tag{9.97}$$

で定義され (9.53)、その性質 (自由粒子?)

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}) \Lambda^\mu_c (p, p) u(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{9.54}$$

より

$$e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p}) \Lambda^\mu (p, p) u(\boldsymbol{p}) = e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p}) L\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) = e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p}) \gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) A(p, p) \tag{9.98}$$

p, p' について対称なので

$$L = A(p, p) + \cdots = A(p', p') + \cdots \tag{9.99}$$

以上より

$$\begin{aligned} e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \Lambda^\mu_c (p', p) u(\boldsymbol{p}) &= e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) \left\{ A(p', p) - \frac{1}{2} A(p', p') - \frac{1}{2} A(p, p) \right\} + \cdots \\ &= e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p'}) \gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) \left\{ \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \cdots \end{aligned}$$

電子の弾性散乱の Feynman 振幅は $A_{e\mu}$ を掛けることで得られる (9.67)：

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 \left\{ 1 + \frac{e^2}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \cdots \tag{9.100}$$

$\mathscr{M}_0$ は最低次の振幅を表し

$$\mathscr{M}_0 = ie\bar{u}(\boldsymbol{p'}) \not{A}_e (\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{p}) u(\boldsymbol{p'})$$

よって断面積は ((8.91) 参照)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mathrm{El}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \cdots \tag{9.101}$$

(8.106),(8.107)(もしくは $\lambda \to 0$ として (8.110)) と比較すれば制動放射の発散ちょうど打ち消しあうことが分かる。これは高次の項でも同じ。