8.9 赤外発散

制動放射と散乱は本質的に不可分である。実際の観測を考えると、測定のエネルギー分解能 ΔE 以下の光子を放出する制動放射は、エネルギーを失わない散乱として観測される。これを断面積で表すと

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{Exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{El}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{B}} \tag{8.105}$$

制動放射の断面積は前節の結果を $0 \leq \omega \leq \Delta E$ で積分して

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{B}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{0} \alpha B \tag{8.106}$$

と求められる。ここで

$$B = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{0\leq|\mathbf{k}|\leq\Delta E} \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk}\right]^2 \tag{8.107}$$

非積分関数は $\frac{1}{\omega}$ と振る舞うので、積分は対数的に発散する。これは光子の質量を 0 として扱ったためで、仮想的に小さな質量 λ を導入し、計算が終わってから $\lambda \to 0$ として QED の結果を得ることを考えよう。

質量の導入は実光子の条件 $k^2 = 0$ を $k^2 = \lambda^2$ と変化させることに対応する。(k^2 の項は伝播関数に現れるので) これを代入すると、断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{0} \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{2p'\varepsilon}{2p'k + \lambda^2} + \frac{2p\varepsilon}{-2pk + \lambda^2}\right]^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \tag{8.108}$$

と変更を受ける。非偏極断面積を考えるには、偏極状態について和を取るが、質量を持つために縦偏極の存在が許される。電磁場の Lagrangian に質量項を加えると

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

この Lagrangian より導かれる場の方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$$

である (Proca 方程式)。両辺 ∂_ν で微分すると

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

が成り立つ。つまり、Lorenz ゲージが常に成り立つので光子が mass-less だった場合と比べて自由度が一つ増える。

具体的には $k = (|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_\lambda)$ となる座標系に対して

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathbf{k}) &= (0, 1, 0, 0) \\
\varepsilon_2(\mathbf{k}) &= (0, 0, 1, 0) \\
\varepsilon_3(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\lambda}(|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})
\end{aligned}$$

ととれば

$$\sum_{r=1}^{3}\varepsilon_{r\alpha}\varepsilon_{r\beta}=-g_{\alpha\beta}+\frac{k_\alpha k_\beta}{\lambda^2} \tag{8.109}$$

が成り立つ。第 2 項はゲージ条件 $k_\alpha\mathcal{M}^\alpha=0$ より断面積への寄与を持たないから、結局

$$B(\lambda)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\lambda}\left[\frac{2p'}{2p'k+\lambda^2}+\frac{2p}{-2pk+\lambda^2}\right]^2 \tag{8.110}$$

となる。但し $\omega_\lambda=\left(\lambda^2+\mathbf{k}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ であり、積分は $\lambda\leq\omega\leq\Delta E$ の範囲で行う。
制動放射の 1 次の摂動を考えたので、弾性散乱も 1 次の摂動を考える必要がある (vertex 補正)。詳細は 9.7(私の担当のようです) で扱うが、今は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{El}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0[1+\alpha R(\lambda)] \tag{8.111}$$

と置く。これより、実際に観測される散乱の断面積は、1 次までの摂動で

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{Exp}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0\{1+\alpha[B(\lambda)+R(\lambda)]+O(\alpha^2)\} \tag{8.112}$$

と求まる。$\lambda\to0$ の極限で $B(\lambda)\to\infty$ であった。実は $R(\lambda)\to-\infty$ であって、これらは正確に打ち消しあい有限の値を持つ。(放射補正)
実験的な断面積はエネルギー分解能によって異なるため、実験値から放射補正を引いた断面積を考えることで、理論との比較が可能になる。
また、放射補正による発散の打ち消しは、摂動の各次数で成り立つという Bloch-Nordsieck(ノルトジーク) の定理が知られている。全次数の和より exponential が現れて

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{Exp}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 e^{\alpha[B(\lambda)+R(\lambda)]} \tag{8.113}$$

という式が示される。これに対応して弾性散乱の断面積について

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\mathrm{El}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 e^{\alpha R(\lambda)} \tag{8.114}$$

も成り立つ。$\lambda\to0$ の極限で $R(\lambda)\to-\infty$ であったことを思い出すと、$\lambda=0$ の散乱の寄与は 0 である。つまり、光子の放射を伴わない真の弾性散乱は存在しない。これは古典論の荷電粒子の運動が電磁波を放射することと対応している。
この結果は QED に一般に成り立ち、赤外発散は摂動の次数ごとに放射補正によって有限の値を取る。