5　光子：共変理論

5.1　古典場

電磁場テンソル

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

と荷電電流密度 $s^\mu(x) = (c\rho(x), \mathbf{j}(x))$ を用いると Maxwell 方程式は

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} s^\mu(x) \tag{5.2}$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0 \tag{5.3}$$

となる。$F^{\mu\nu}$ は反対称だから (5.3) は恒等式であって、また、(5.2) に ∂_μ を作用させると

$$\partial_\mu s^\mu(x) = 0 \tag{5.4}$$

となり、自然に連続の式が課される。電磁場テンソルは 4 元ポテンシャル A^μ を用いて

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x) \tag{5.5}$$

とも表わせる。(5.2) は

$$\Box A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = \frac{1}{c} s^\mu(x) \tag{5.6}$$

これは Lorentz 共変で、ゲージ変換

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \tag{5.7}$$

に対して Lorentz 不変である。(5.6) は Lagrangian 密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c} s_\mu(x) A^\mu(x) \tag{5.8}$$

から導かれる。しかし、この Lagrangian 密度は正準交換関係を導入するのに適切でない。なぜなら共役な場

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c} F^{\mu 0}$$

が $\mu = 0$ の場合に 0 になってしまうからである ($\because$ $F^{\mu\nu}$ は反対称)。Fermi によって提案された量子化に適切な Lagrangian 密度は

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) - \frac{1}{c} s_\mu(x) A^\mu(x) \tag{5.10}$$

で、共役な場は

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c^2} \dot{A}^\mu(x) \tag{5.11}$$

となる。この Lagrangian 密度から導かれる場の方程式は

$$\Box A^{\mu}(x) = \frac{1}{c} s^{\mu}(x) \tag{5.12}$$

であり、Maxwell 方程式と等価であるためには

$$\partial_{\mu} A^{\mu}(x) = 0 \tag{5.13}$$

が必要である。これを Lorentz ゲージと呼ぶ。
Lorentz ゲージは Lorentz 共変なため扱い易い。また、自由場 ($s^{\mu}(x) = 0$) において場の方程式が

$$\Box A^{\mu}(x) = 0 \tag{5.16}$$

となる。これは Klein-Goldon 方程式において $m \to 0$ としたものである。これにより、電磁場の量子化は Klein-Goldon 場と同様に行える。方程式の基本解で展開すると

$$A^{\mu}(x) = A^{\mu +}(x) + A^{\mu -}(x) \tag{5.16a}$$

$$A^{\mu +}(x) = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} \tag{5.16b}$$

$$A^{\mu -}(x) = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) a_r^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{ikx} \tag{5.16c}$$

和は周期境界条件を満たす $\mathbf{k}$ について取り、

$$k^0 = \frac{1}{c}\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}| \tag{5.17}$$

である。添え字 $r = 0$ から $r = 3$ は 4 元ポテンシャルの成分に対応する独立な四つの偏極状態を表す。これを実で規格直交性と完全性を持つ四つの偏極ベクトル ε_r^{μ} によって記述する。即ち

$$\varepsilon_r(\mathbf{k})\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs} \tag{5.18}$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_r^{\nu}(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \tag{5.19}$$

$$\zeta_0 = -1\ ,\ \zeta_i = 1\ (i = 1, 2, 3) \tag{5.20}$$

物理的意味を分かりやすくするために、ε_r^{μ} を具体的に選ぶ。まず

$$\varepsilon_0^{\mu}(\mathbf{k}) = n^{\mu} \equiv (1, 0, 0, 0) \tag{5.21a}$$

$$\varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3 \tag{5.21b}$$

として、$\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}(\mathbf{k})$ を $\mathbf{k}$ に直交し、互いに直交する単位ベクトルに取る。そして

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{5.22a}$$

と取れば、

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})=0,\quad r=1,2;\quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})=\delta_{rs},\quad r,s=1,2,3 \tag{5.22b}$$

を満たす。$r=1,2$ を横偏極、$r=3$ を縦偏極、$r=0$ をスカラー (time-like) 偏極と呼ぶ。縦偏極ベクトル $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k})$ を共変な形で表すと

$$\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k})=\frac{k^\mu-(kn)n^\mu}{[(kn)^2-k^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{5.22c}$$

である。
注：今、実光子の条件 $k^2=0$ は課していない。
注：実偏極ベクトルで書けるのは直線偏極の場合で、円・楕円偏極を表すには複素偏極ベクトルが必要。

5.2 共変量子化

A^μ に課すべき同時刻交換関係 (ETCR) は

$$\left.\begin{array}{l}[A^\mu(\mathbf{x},t),A^\nu(\mathbf{x}',t)]=0,\quad \left[\dot{A}^\mu(\mathbf{x},t),\dot{A}^\nu(\mathbf{x}',t)\right]=0\\ \left[A^\mu(\mathbf{x},t),\dot{A}^\nu(\mathbf{x}',t)\right]=-i\hbar c^2 g^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\end{array}\right\} \tag{5.23}$$

Klein-Goldon 場と同様に

$$\left[A^\mu(x),\dot{A}^\nu(x')\right]=i\hbar c D^{\mu\nu}(x-x') \tag{5.24}$$

ここで

$$D^{\mu\nu}(x-x')=\lim_{m\to 0}\left[-g^{\mu\nu}\Delta(x)\right] \tag{5.25}$$

$\Delta(x)$ は不変 Δ 関数。Feynman の伝播関数は

$$\left\langle 0\middle|\,\mathrm{T}\left\{A^\mu(x),\dot{A}^\nu(x')\right\}\middle|0\right\rangle=D_F^{\mu\nu}(x-x') \tag{5.26}$$

ここで

$$D_F^{\mu\nu}(x-x')=\lim_{m\to 0}\left[-g^{\mu\nu}\Delta_F(x)\right]=\frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon} \tag{5.27}$$

展開係数の演算子の交換関係は

$$\left.\begin{array}{r}\left[a_r(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{k}')\right]=\zeta_r\delta_{rs}\delta'_{\mathbf{kk}}\\ \left[a_r(\mathbf{k}),a_s(\mathbf{k}')\right]=\left[a_r^\dagger(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{k}')\right]=0\end{array}\right\} \tag{5.28}$$

$r=1,2,3$ については Boson の交換関係を満たすが、$r=0$ については生成・消滅演算子の役割が入れ替わっているようになっている。しかし、この変更は別の困難を生むため、ここでは Gupta-Bleuler の手続きに従うことにする。

Gupta-Bleuler の理論では $r = 0, 1, 2, 3$ について $a_r(\mathbf{k})$ を消滅演算子、$a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を生成演算子をして扱う。真空は

$$a_r(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \quad \text{for all } \mathbf{k} \tag{5.29a}$$

$$\Leftrightarrow A^{\mu+}(x)\,|0\rangle = 0, \quad \text{for all } x \tag{5.29b}$$

で定義する。一粒子状態は

$$|1_{\mathbf{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \tag{5.30}$$

この解釈の正当化のために Hamiltonian を計算してみる。

$$H = \int d^3\mathbf{x} N\left[\pi^\mu(x)\dot{A}_\mu(x) - \mathscr{L}(x)\right] \tag{5.31}$$

は今

$$H = \sum_{r\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) \tag{5.32}$$

と表せる。交換関係 (5.28) より、例えば一粒子状態に対して

$$\begin{aligned} H\,|1_{\mathbf{k}r}\rangle &= \sum_{\mathbf{q}s} \hbar\omega_{\mathbf{q}}\zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q})a_s(\mathbf{q})a_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \\ &= \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \end{aligned}$$

となり Hamiltonian の固有値は正になる。これに対応して数演算子も

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) \tag{5.33}$$

と定義される。ただし、一粒子状態のノルムを計算すると

$$\langle 1_{\mathbf{k}r}\,|\,1_{\mathbf{k}r}\rangle = \left\langle 0 \,\middle|\, a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) \,\middle|\, 0\right\rangle = \zeta_r\,\langle 0\,|\,0\rangle = \zeta_r$$

となり、負になり得る。しかし、実際は縦偏極光子とスカラー光子は観測されないため問題にはならない。こうした数式上の問題は Lorentz 条件を無視しているために理論が Maxwell 方程式と等価でないことによる。

しかし、Lorentz 条件は交換関係 (5.24) と両立しない。なぜなら

$$0 = \left[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')\right] = i\hbar c\partial_\mu D^{\mu\nu}(x - x') \not\equiv 0$$

($\because$一つ目の等号 : 両辺が exp で書けることに注意) となるからである。よってこれよりも弱い条件

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x)\,|\Psi\rangle = 0 \tag{5.34}$$

を課すことにする。共役な式は

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu-}(x) = 0$$

本来の Lorentz 条件は期待値を取ると成り立っている：

$$\langle \Psi \,|\, \partial_\mu A^\mu(x) \,|\, \Psi \rangle = \left\langle \Psi \,\middle|\, \partial_\mu A^{\mu +}(x) + \partial_\mu A^{\mu -}(x) \,\middle|\, \Psi \right\rangle = 0$$

新しい条件 (5.34) を運動量空間で考える。(5.21b) より

$$[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] \,|\Psi\rangle = 0, \quad \text{all } \mathbf{k} \tag{5.35}$$

これは縦偏極光子とスカラー光子に対する条件になっている。この効果はエネルギー期待値を計算することで明らかになる。

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi \,\middle|\, a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \,\middle|\, \Psi \right\rangle &= \left\langle \Psi \,\middle|\, a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \,\middle|\, \Psi \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi \,\middle|\, a_3^\dagger(\mathbf{k}) [a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] \,\middle|\, \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \,\middle|\, [a_3^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})] a_0(\mathbf{k}) \,\middle|\, \Psi \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi \,\middle|\, a_3^\dagger(\mathbf{k}) [a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] \,\middle|\, \Psi \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.36}$$

だから

$$\langle \Psi \,|\, H \,|\, \Psi \rangle = \left\langle \Psi \,\middle|\, \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \,\middle|\, \Psi \right\rangle \tag{5.37}$$

となり、縦偏極・スカラー光子はエネルギーに寄与を持てないことが分かる。これは他の obsevable についても同様である。

非 Lorentz 共変な形式で放射場の自由度が 2 であったことを思い出すと、4 元ポテンシャルは余分な二つの自由度を導入したことになる。一つはゲージ条件、もう一つは Lorentz ゲージの選び方の自由度に対応している。

自由場以外では縦偏極光子とスカラー光子は無視できなくなる。これらの光子は、Coulomb 相互作用の共変な記述を与える際に仮想粒子として重要な役割を果たすことを次節で見ていく。

5.3 光子の伝播関数

運動量空間での伝播関数は

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ikx} \tag{5.38}$$

(5.27) と (5.19) より

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \tag{5.39}$$

前節で考えた偏極ベクトルの具体的な表式を使うと

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} + (-1) n^\mu n^\nu \right\} \tag{5.40}$$

を得る。第 1 項

$$
{}_T D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \tag{5.41}
$$

は横偏極光子の交換だと解釈できる。残りの 2 項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} + (-1) n^\mu n^\nu \right\} \\
&= \frac{k^\mu k^\nu - (kn)k^\mu n^\nu - (kn)k^\nu n^\mu}{[k^2 + i\varepsilon]\,[(kn)^2 - k^2]} + \frac{k^2 n^\mu n^\nu}{\left[k^2 + i\varepsilon\right][(kn)^2 - k^2]} \\
= \quad & \frac{n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2} + \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2} \right]
\end{aligned}
$$

この第 1 項について $n^\mu = g^{\mu 0}$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
{}_C D_F^{\mu\nu}(x) &= \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} \int dk^0 e^{ik^0 x^0} \\
&= g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0)
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

時間依存性 $\delta(x^0)$ と空間依存性 $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ は同時刻 Coulomb ポテンシャルの特徴である。これが縦偏極光子とスカラー光子の交換の効果である。

ここまでで電磁相互作用について完璧に記述できているため、第 2 項 ${}_R D_F^{\mu\nu}(x)$ の寄与は 0 になるはずである。それは電磁場が保存する電荷-電流密度とのみ相互作用することによる。具体例として電子-電子散乱を考えると、その行列要素は摂動の最低次で

$$
\int d^4x \int d^4y s_1^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y) \tag{5.44}
$$

になるらしい。

$$
s_r^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k s_r^\mu(k) e^{-ikx}, \quad r = 1, 2 \tag{5.45}
$$

より、運動量空間で

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x \int d^4y s_1^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4x \int d^4y \int d^4k \int d^4k' \int d^4k'' s_1^\mu(k) e^{-ikx} {}_R D_{F\mu\nu}(k') e^{-ik'(x-y)} s_2^\nu(k'') e^{-ik''y} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^4k' \int d^4k'' s_1^\mu(k) {}_R D_{F\mu\nu}(k') s_2^\nu(k'') \delta^{(4)}(k+k') \delta^{(4)}(k'-k'') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k s_1^\mu(-k) {}_R D_{F\mu\nu}(k) s_2^\nu(k)
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

ここで連続の式を運動量空間で考えると

$$
k_\mu s_r^\mu(k) = 0, \quad r = 1, 2 \tag{5.47}
$$

${}_R D_F^{\mu\nu}(x)$ を見ると、どの項も少なくとも k^μ か k^ν のどちらかに比例する。したがってこの寄与は 0 であることが分かる。