17.4 Gauge Boson の性質

Gauge boson を含む SU(2)×U(1) 対称性を持つ Lagrangian 密度を作ろう。まず、gauge boson が massless の場合を考える。B 場は U(1) 対称性を持てばよいから簡単で

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) \tag{17.52}$$

但し

$$B^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu B^\mu(x) - \partial^\mu B^\nu(x) \tag{17.53}$$

とすればよい。SU(2) 対称性は、B 場が元々SU(2) 不変であったから自明に従う。難しいのは W boson 場である。

$$-\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}(x)F_i^{\mu\nu}(x) \tag{17.54}$$

但し

$$F_i^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu W_i^\mu(x) - \partial^\mu W_i^\nu(x) \tag{17.55}$$

としても、SU(2) 不変ではない。対称性を回復するには

$$G_i^{\mu\nu}(x) \equiv F_i^{\mu\nu}(x) + g\varepsilon_{ijk}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x) \tag{17.56}$$

を用いて gauge boson 場の Lagrangian を

$$\mathscr{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}(x)G_i^{\mu\nu}(x) \tag{17.57}$$

と構成すればよい。不変性を確かめるには SU(3) の場合と同様に

$$\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) = 2\delta_{ij}$$

を用いて

$$\mathscr{L}_G = -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right)$$

と考えれば分かりやすい (11.4 節)。但し

$$G^{\mu\nu} \equiv \tau_i G_i^{\mu\nu}$$

同様に

$$W^\mu \equiv \tau_i W_i^\mu, \quad \omega \equiv \tau_i\omega_i$$

を定義しておく。ここで

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{17.16}$$
$$\Rightarrow [\omega, W^\mu] = 2i\tau_i\varepsilon_{ijk}\omega_j W_k^\mu$$

を用いると W_i^μ の変換は

$$
\begin{aligned}
W'^{\mu}_i(x) &= W_i^\mu(x) + \delta W_i^\mu(x) \\
&= W_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega(x) + \frac{1}{2} ig \left[\omega(x), W^\mu(x)\right]
\end{aligned}
\tag{17.32b'}
$$

と表せる。また、field strength は

$$
G_i^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu - \frac{1}{2} ig \left[W^\mu, W^\nu\right] \tag{17.56'}
$$

と表せる。SU(2) ゲージ変換の下で $G^{\mu\nu}$ の変化分は (ωは微小)

$$
\begin{aligned}
\delta G^{\mu\nu}(x) &\approx \partial^\nu \delta W_i^\mu - \partial^\mu \delta W_i^\nu - \frac{1}{2} g \left[\delta W^\mu, W^\nu\right] - \frac{1}{2} g \left[W^\mu, \delta W^\nu\right] \\
&= \frac{1}{2} ig \partial^\nu \left[\omega(x), W^\mu(x)\right] - \frac{1}{2} ig \partial^\mu \left[\omega(x), W^\nu(x)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} g \left[-\partial^\mu \omega + \frac{1}{2} ig \left[\omega(x), W^\mu(x)\right], W^\nu\right] - \frac{1}{2} g \left[W^\mu, -\partial^\nu \omega + \frac{1}{2} ig \left[\omega(x), W^\nu(x)\right]\right] \\
&= \frac{1}{2} ig \left[\omega, \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu\right] + \frac{1}{4} g^2 \left[\left[\omega, W^\mu\right], W^\nu\right] + \frac{1}{4} g^2 \left[\left[W^\nu, \omega\right], W^\mu\right] \\
&= \frac{1}{2} ig \left[\omega, \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu\right] - \frac{1}{4} g^2 \left[\left[W^\mu, W^\nu\right], \omega\right] \quad (\because \text{ Jacobi 恒等式}) \\
&= \frac{1}{2} ig \left[\omega, G^{\mu\nu}\right]
\end{aligned}
$$

だから、Lagrangian の変化分は

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_G &= -\frac{1}{8} \mathrm{Tr}\left(\delta G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \delta G^{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{1}{16} ig \mathrm{Tr}\left\{\left[\omega, G_{\mu\nu}\right] G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \left[\omega, G^{\mu\nu}\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{16} ig \mathrm{Tr}\left\{\left[\omega, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より、SU(2)×U(1) 不変な Lagrangian として

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^B &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \\
&= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} F_{i\mu\nu}(x) F_i^{\mu\nu}(x) \\
&\quad + g \varepsilon_{ijk} W_{i\mu}(x) W_{j\nu}(x) \partial^\mu W_k^\nu(x) - \frac{1}{4} g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} W_j^\mu(x) W_k^\nu(x) W_{l\mu}(x) W_{m\nu}(x)
\end{aligned}
\tag{17.58}
$$

を得る。このうち、第 1,2 項は自由場を表し

$$
W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_{1\mu} - iW_{2\mu}\right) \tag{17.43}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
W_{3\mu} &= \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\
B_\mu &= -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu
\end{aligned}
\right.
\tag{17.45}
$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0^B &\equiv -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}(x)F_i^{\mu\nu}(x) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^{\dagger}(x)F_W^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}(x)Z^{\mu\nu}(x) \qquad (17.59)\end{aligned}$$

と書ける。但し

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \qquad (5.5)$$

$$F_W^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu \qquad (16.21b)$$

$$Z^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu Z^\mu - \partial^\mu Z^\nu \qquad (17.60)$$

である。これで、massless でスピン 1 の boson、$\gamma, W^{\pm}, Z^0$ が記述できた。第 3,4 項は gauge boson 同士の相互作用を表す。光子が電荷を運ぶことは無かった QED とは対照的で、gauge boson が弱アイソスピン電荷を運ぶことに起因する。

17.5　レプトンと Gauge Boson の質量

massive な gauge boson を記述するには、mass term

$$m_W^2 W_\mu^\dagger(x)W^\mu(x) + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu(x)Z^\mu(x) \qquad (17.61)$$

を導入すればよいように思える。しかし、これは SU(2) 対称性,U(1) 対称性の両方を破ってしまう。これでは繰りこみ不可能な理論になってしまう。同様に massive なレプトンを考えよう。例えば、電子の場に mass term

$$-m_e\overline{\psi}_e(x)\psi_e(x) \qquad (17.62a)$$

を導入したいが、これも SU(2)×U(1) 対称性を破ってしまう。これは

$$-m_e\overline{\psi}_e(x)\left[P_R + P_L\right]\psi_e(x) = -m_e\left[\overline{\psi}_e^L(x)\psi_e^R(x) + \overline{\psi}_e^R(x)\psi_e^L(x)\right] \qquad (17.62b)$$

とすれば分かりやすい (left-handed のみが変換する SU(2) が破れる)。次の章で、繰りこみ可能かつ massive な粒子を記述できる自発的対称性の破れについて議論する。