16.6　IVB 理論の応用

16.6.1　ミューオンの崩壊

第 1 の例として、ミューオンの崩壊

$$\mu^-(p,r) \to e^-(p',r') + \overline{\nu}_e(q_1,r_1) + \nu_\mu(q_2,r_2) \tag{16.39}$$

を考えよう。ダイアグラムよりこの反応の Feynman 振幅は

$$\mathscr{M} = -g_W^2 \left[\overline{u}_e(\boldsymbol{p'})\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v_{\nu_e}(\boldsymbol{q}_1)\right] \frac{i\left(-g_{\alpha\beta}+\frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2}\right)}{k^2-m_W^2+i\varepsilon} \left[\overline{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p})\right] \tag{16.40}$$

但し、スピンの添え字は省略し、

$$k \equiv p - q_2 = p' + q_1 \tag{16.41}$$

である。$m_W \to \infty$ の極限で

$$\mathscr{M} = -\frac{iG}{\sqrt{2}} \left[\overline{u}_e(\boldsymbol{p'})\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v_{\nu_e}(\boldsymbol{q}_1)\right] \left[\overline{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{q}_2)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p})\right] \tag{16.42}$$

Fermi 結合定数 G は

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \equiv \left(\frac{g_W}{m_W}\right)^2 \tag{16.43}$$

実は、相互作用 Hamiltonian が

$$\mathscr{H}_I^{(F)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J_\alpha^\dagger(x) \tag{16.44}$$

で表される系に対して 1 次の摂動を計算すると、同じ Feynman 振幅が得られる。これを確かめよう。Fermion 場の Dirac 方程式の解による展開

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= \sum_{r,\boldsymbol{p}} \left(\frac{m}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\boldsymbol{p})v_r(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right] \qquad (4.38\text{a})\\ \overline{\psi}(x) &= \overline{\psi}^+(x) + \overline{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{r,\boldsymbol{p}} \left(\frac{m}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[d_r(\boldsymbol{p})u\overline{v}_r(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\boldsymbol{p})\overline{u}_r(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right] \qquad (4.38\text{b})\end{aligned}$$

や、1 粒子状態への作用

$$\psi^+(x)\left|e^-\boldsymbol{p}\right\rangle = \left|0\right\rangle \left(\frac{m}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}} u(\boldsymbol{p})e^{-ipx} \tag{7.25a}$$

などを思い出せば、この過程の最低次 (1 次) の S 行列要素は (7.1) より

$$
\begin{aligned}
\left\langle f \middle| S^{(1)} \middle| i \right\rangle &= -\frac{iG}{\sqrt{2}} \int d^4x J^{\alpha}(x) J^{\dagger}_{\alpha}(x) \\
&= -\frac{iG}{\sqrt{2}} \int d^4x \left\langle e, \overline{\nu}_e, \nu_\mu \middle| \overline{\psi}^{-}_{e}(x) \gamma^{\alpha}(1-\gamma_5)\psi^{-}_{\nu_e}(x)\overline{\psi}^{-}_{\nu_\mu}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi^{+}_{\mu}(x) \middle| \mu \right\rangle \\
&= -\frac{iG}{\sqrt{2}} \int d^4x \left[\left(\frac{m_e}{VE_{\boldsymbol{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \overline{u}_e(\boldsymbol{p}') e^{ip'x} \right] \gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) \left[\left(\frac{m_{\nu_e}}{VE_{\boldsymbol{q}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} v_{\nu_e}(\boldsymbol{q}_1) e^{iq_1x} \right] \\
&\qquad \times \left[\left(\frac{m_{\nu_\mu}}{VE_{\boldsymbol{q}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \overline{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{q}_2) e^{iq_2x} \right] \gamma_\alpha(1-\gamma_5) \left[\left(\frac{m_\mu}{VE_{\boldsymbol{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} u_\mu(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} \right] \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \left(\frac{m_e}{VE_{\boldsymbol{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{\nu_e}}{VE_{\boldsymbol{q}_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{\nu_\mu}}{VE_{\boldsymbol{q}_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_\mu}{VE_{\boldsymbol{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[-\frac{iG}{\sqrt{2}} \overline{u}_e(\boldsymbol{p}') \gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) v_{\nu_e}(\boldsymbol{q}_1) \overline{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{q}_2) \gamma_\alpha (1-\gamma_5) u_\mu(\boldsymbol{p}) \right]
\end{aligned}
$$

これで確認できた。この相互作用は Fermi の 4 点相互作用と呼ばれる。有限の m_W に対してのズレは $\left(\frac{m_\mu}{m_W}\right)^2 \approx 10^{-6}$ のオーダーである。低エネルギー (k : 十分小？) でこの近似は有効で、特にミューオンの崩壊を考える際には良い近似を与える。

この描像を用いてミューオンの寿命を求めよう。(16.36) より微分崩壊頻度は

$$
d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \frac{m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}}{E} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{d^3\boldsymbol{p}'}{E'} \frac{d^3\boldsymbol{q}_1}{E_1} \frac{d^3\boldsymbol{q}_2}{E_2} |\mathscr{M}|^2 \tag{16.45}
$$

全崩壊終状態のスピンの和を取り、運動量を積分する。寿命はスピンに依らないとし、始状態のスピンについては平均を取る。まず、スピンの和を計算しよう。エネルギー射影演算子

$$
\Lambda^{\pm}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\not{p} \pm m}{2m} \right)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(\boldsymbol{p}) \overline{u}_{r\alpha}(\boldsymbol{p}) \tag{8.24}
$$

と

$$
\begin{aligned}
\left\{ \overline{u}(\boldsymbol{p}) \gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) u(\boldsymbol{p}') \right\}^{\dagger} &= u^{\dagger}(\boldsymbol{p}') \left\{ \gamma^{\alpha\dagger} - (\gamma_\alpha \gamma_5)^{\dagger} \right\} \left\{ u^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \gamma^0 \right\}^{\dagger} \\
&= \overline{u}(\boldsymbol{p}') \gamma^0 \left\{ \gamma^{\alpha\dagger} + (\gamma_5 \gamma^{\alpha})^{\dagger} \right\} \gamma^{0\dagger} u(\boldsymbol{p}) \\
&= \overline{u}(\boldsymbol{p}') \gamma^0 \left\{ \gamma^{\alpha\dagger} + \gamma^{\alpha\dagger} \gamma_5^{\dagger} \right\} \gamma^{0\dagger} u(\boldsymbol{p}) \\
&= \overline{u}(\boldsymbol{p}') \left\{ \gamma^0 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 \gamma_5 \right\} u(\boldsymbol{p}) \\
&= \overline{u}(\boldsymbol{p}') \left\{ \gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha} \gamma_5 \right\} u(\boldsymbol{p}) \\
&= \overline{u}(\boldsymbol{p}') \gamma^{\alpha} \left(1 - \gamma_5 \right) u(\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

を思い出せば

$$
\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} |\mathscr{M}|^2 &= \frac{G^2}{2} \sum_{r_1} \sum_{r_2} \sum_{r_3} \sum_{r_4} \left[\overline{u}_{r_1\mu}(\boldsymbol{p}') \left\{ \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \right\}_{\mu\nu} v_{r_2\nu}(\boldsymbol{q}_1) \right] \left[\overline{u}_{r_3\gamma}(\boldsymbol{q}_2) \left\{ \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \right\}_{\gamma\delta} u_{r_4\delta}(\boldsymbol{p}) \right] \\
&\qquad \times \left[\overline{v}_{r_2\rho}(\boldsymbol{q}_1) \left\{ \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right\}_{\rho\sigma} u_{r_1\sigma}(\boldsymbol{p}') \right] \left[\overline{u}_{r_4\lambda}(\boldsymbol{p}) \left\{ \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right\}_{\lambda\kappa} u_{r_3\kappa}(\boldsymbol{q}_2) \right] \\
&= \frac{G^2}{2} \left(\sum_{r_1} u_{r_1\sigma}(\boldsymbol{p}') \overline{u}_{r_1\mu}(\boldsymbol{p}') \right) \left\{ \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \right\}_{\mu\nu} \left(\sum_{r_2} v_{r_2\nu}(\boldsymbol{q}_1) \overline{u}_{r_2\rho}(\boldsymbol{q}_1) \right) \left\{ \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right\}_{\rho\sigma} \\
&\qquad \times \left(\sum_{r_3} u_{r_3\kappa}(\boldsymbol{q}_2) \overline{u}_{r_3\gamma}(\boldsymbol{q}_2) \right) \left\{ \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \right\}_{\gamma\delta} \left(\sum_{r_4} u_{r_4\delta}(\boldsymbol{p}) \overline{u}_{r_4\lambda}(\boldsymbol{p}) \right) \left\{ \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right\}_{\lambda\kappa} \\
&= \frac{G^2}{2} \mathrm{Tr} \left[\Lambda^+(\boldsymbol{p}') \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \Lambda^-(\boldsymbol{q}_1) \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right] \mathrm{Tr} \left[\Lambda^+(\boldsymbol{q}_2) \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \Lambda^+(\boldsymbol{p}) \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] \\
&= \frac{G^2}{2} \mathrm{Tr} \left[\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \frac{\not{q}_1 - m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}} \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right] \mathrm{Tr} \left[\frac{\not{q}_2 + m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}} \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \frac{\not{p} + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right]
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathscr{M}|^2 &= \frac{G^2}{64} \mathrm{Tr} \left[(\not{p}' + m_e) \gamma^\alpha (1-\gamma_5) (\not{q}_1 - m_{\nu_\mu}) \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right] \\
&\qquad \times \mathrm{Tr} \left[(\not{q}_2 + m_{\nu_\mu}) \gamma_\alpha (1-\gamma_5) (\not{p} + m_\mu) \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] \\
&= \frac{G^2}{64} \mathrm{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right] \mathrm{Tr} \left[\not{q}_2 \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{p} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right]
\end{aligned} \tag{16.46}
$$

最後の行では $m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu} \to 0$ とし、奇数個のガンマ行列のトレースは 0 であることを用いた。一つ目のトレース

$$
E^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\beta (1-\gamma_5) \right] \tag{16.47}
$$

を計算しよう。γ_5 の反交換関係とトレースの公式 (A.17),(A.21) を用いれば

$$
\begin{aligned}
E^{\alpha\beta} &= 2p'_\mu q_{1\nu} \mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1-\gamma_5)] \\
&= 8p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta}
\end{aligned} \tag{16.48a}
$$

ただし

$$
x^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \tag{16.49}
$$

$\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}$ は完全反対称テンソル。二つ目のトレースも同様に

$$
M_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr} \left[\not{q}_2 \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{p} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] = 8q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta} \tag{16.48b}
$$

従って

$$
m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathscr{M}|^2 = G^2 p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta} \tag{16.50}
$$

(A.14c) より

$$
\begin{aligned}
x^{\mu\alpha\nu\beta}x_{\sigma\alpha\tau\beta} &= (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta})(g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta} - g_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta} + g_{\sigma\beta}g_{\alpha\tau} + i\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta}) \\
&= g^{\mu}_{\sigma}g^{\nu}_{\tau} - \cancel{g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau}} + g^{\mu}_{\tau}g^{\nu}_{\sigma} + ig^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \\
&\quad - \cancel{g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}} + \cancel{4g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau}} - \cancel{g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau}} - ig^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \\
&\quad + g^{\mu}_{\tau}g^{\nu}_{\sigma} - \cancel{g^{\mu\nu}g_{\sigma\tau}} + g^{\mu}_{\sigma}g^{\nu}_{\tau} + ig^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \\
&\quad + ig_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta}\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} - ig_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} + ig_{\sigma\beta}g_{\tau\alpha}\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} - \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \\
&= 2g^{\mu}_{\sigma}g^{\nu}_{\tau} + \cancel{2g^{\mu}_{\tau}g^{\nu}_{\sigma}} + i(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})\varepsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \\
&\quad + i(g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta} - g_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta} + g_{\sigma\beta}g_{\tau\alpha})\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} + 2(g^{\mu}_{\sigma}g^{\nu}_{\tau} - \cancel{g^{\mu}_{\tau}g^{\nu}_{\sigma}}) \\
&= 4g^{\mu}_{\sigma}g^{\nu}_{\tau} \qquad (\because \varepsilon\text{は完全反対称テンソル})
\end{aligned} \tag{16.51}
$$

だから

$$
m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2}\sum_{\text{spins}} |\mathscr{M}|^2 = 4G^2(pq_1)(p'q_2) \tag{16.52}
$$

以上より、非偏極微分崩壊頻度は

$$
d\Gamma = \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E}(pq_1)(p'q_2)\delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p)\frac{d^3\boldsymbol{p}'}{E'}\frac{d^3\boldsymbol{q}_1}{E_1}\frac{d^3\boldsymbol{q}_2}{E_2} \tag{16.53}
$$

次に運動量の積分を考える。まず、ニュートリノの運動量に対して次の積分を計算しよう：

$$
I^{\mu\nu}(q) \equiv \int d^3\boldsymbol{q}_1 d^3\boldsymbol{q}_2 \frac{q_1^\mu q_2^\nu}{E_1 E_2}\delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \tag{16.54}
$$

ただし

$$
q \equiv p - p' \tag{16.55}
$$

Lorentz 共変性より $I^{\mu\nu}$ は

$$
I^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu}A(q^2) + q^\mu q^\nu B(q^2) \tag{16.56}
$$

という形をしているから

$$
g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) = 4A(q^2) + q^2 B(q^2) \tag{16.57a}
$$

$$
q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q) = q^2 A(q^2) + (q^2)^2 B(q^2) \tag{16.57b}
$$

を得る。ニュートリノの質量が 0 であるとする $\left(q_1^2 = q_2^2 = 0\right)$ と、運動量の保存 $q = q_1 + q_2$ は

$$
q^2 = 2(q_1 q_2) \tag{16.58}
$$

を与える。さて、$A(q^2), B(q^2)$ を求めよう。(16.57a) の左辺は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) &= \int d^3\boldsymbol{q}_1 d^3\boldsymbol{q}_2 \frac{(q_1q_2)}{E_1E_2}\delta^{(4)}(q_1+q_2-q) \\ &= \frac{q^2}{2}\int \frac{d^3\boldsymbol{q}_1}{E_1}\frac{d^3\boldsymbol{q}_2}{E_2}\delta^{(4)}(q_1+q_2-q) \\ &\equiv \frac{1}{2}q^2 I(q^2) \end{aligned} \tag{16.59}$$

積分 $I(q^2)$ は Lorentz 不変だから、二つのニュートリノの重心系：$\boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2$ であって

$$\omega \equiv E_1 = |\boldsymbol{q}_1| = E_2 = |\boldsymbol{q}_2| \tag{16.60}$$

で計算しよう。

$$\begin{aligned} I(q^2) &= \frac{q^2}{2}\int \frac{d^3\boldsymbol{q}_1 d^3\boldsymbol{q}_2}{E_1E_2}\delta(|\boldsymbol{q}_1|+|\boldsymbol{q}_2|-q^0)\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}) \\ &= \int d^3\boldsymbol{q}_1 \frac{\delta(2\omega-q^0)}{\omega^2} \\ &= \int |\boldsymbol{q}_1|^2 d|\boldsymbol{q}_1| d\Omega \frac{\delta(|\boldsymbol{q}_1|-\frac{q^0}{2})}{2|\boldsymbol{q}_1|^2} \\ &= 2\pi \qquad (\because\ q^0>0) \end{aligned} \tag{16.61}$$

結局

$$g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) = \pi q^2 \tag{16.62a}$$

同様にして

$$q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q) = \left(\frac{q}{2}\right)^2 I(q^2) = \frac{1}{2}\pi(q^2)^2 \tag{16.62b}$$

を得る。以上 2 式より $A(q^2) = Aq^2, B(q^2) = B\cdot 1$ がわかり

$$\left\{\begin{array}{l} 4A+B=\pi \\ A+B=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{\pi}{6} \\ B=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

だから

$$I^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{6}\pi\left(g^{\mu\nu}q^2 + 2q^\mu q^\nu\right) \tag{16.63}$$

となる。これより、電子の運動量が $\boldsymbol{p}'$ から $d^3\boldsymbol{p}'$ の範囲にある崩壊の微分崩壊頻度は

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5 E}\frac{d^3\boldsymbol{p}'}{E'}[(pp')q^2 + 2(pq)(p'q)] \tag{16.64}$$

最後に、終状態の電子の運動量 $\boldsymbol{p}'$ について積分しよう。ミューオンの静止系

$$p = (m_\mu, \mathbf{0}), \quad q^0 = m_\mu - E', \quad \boldsymbol{q} = -\boldsymbol{p}' \tag{16.65}$$

を考えることにすると

$$
\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5 E}\frac{|\boldsymbol{p}'|^2 d|\boldsymbol{p}'|d\Omega}{E'}\left[(pp')(p-p')^2 + 2\{p^2-(pp')\}\{(p'p)-p'^2\}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5 m_\mu}|\boldsymbol{p}'|dE'd\Omega\left[\left(m_\mu^2+\cancel{m_e^2}-2m_\mu E'\right)m_\mu E' + 2m_\mu(m_\mu-E')(m_\mu E'-\cancel{m_e^2})\right]
\end{aligned} \tag{16.66}
$$

$$
= \frac{4\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5}m_\mu E'^2 dE' d\Omega'(3m_\mu - 4E') \tag{16.67}
$$

最後の行は、$\frac{m_e^2}{m_\mu^2}$ のオーダーの項を無視した (電子の質量を 0 とした)。ここで

$$
\begin{aligned}
q^2 &= (p-p')^2 \\
&= (m_\mu - E')^2 - \boldsymbol{p}'^2 \\
&= m_\mu^2 + E'^2 - 2m_\mu E' - \left(E'^2 - \cancel{m_e^2}\right) \\
&= m_\mu(m_\mu - 2E') \geq 0 \\
\therefore\ E' &\leq \frac{1}{2}m_\mu
\end{aligned}
$$

に注意して積分を行えば、全崩壊頻度は

$$
\Gamma = \frac{4\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5}m_\mu\int_0^{\frac{1}{2}m_\mu}E'^2 dE'\int d\Omega'(3m_\mu - 4E') = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{16.68}
$$

(16.39) の崩壊モードが全てであると仮定すると (実際は 98.6%)、ミューオンの寿命は

$$
\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5} \tag{16.69}
$$

実験値 $\tau_\mu = 2.2\times10^{-6}\ \mathrm{s},\ m_\mu = 105.7\ \mathrm{MeV}$ を代入すれば、Fermi の結合定数は

$$
G = 1.16\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{16.70a}
$$

となる。$m_W = 80$ GeV も考慮すれば、(無次元の) 結合定数は

$$
\frac{g_W^2}{4\pi} = \frac{G}{4\pi\sqrt{2}}m_W^2 \approx 4\times10^{-3} \tag{16.71}
$$

のように十分小さく、摂動論を正当化できる。

(以下おはなし) より正確には、より精度の良い実験値

$$
\tau_\mu = (2.19703\pm0.00004)\times10^{-6}\ \mathrm{s} \tag{16.72}
$$

を用い、電子質量を無視せず、QED 輻射補正や崩壊モードの割合を考慮しなければならない。そうして

$$
G = (1.16637\pm0.00002)\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{16.70b}
$$

を得る。寿命以外の予言も実験とよく一致しているらしい。

最後にレプトン反応の普遍性を注意しておく。タウ粒子の崩壊

$$\tau^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau \tag{16.73}$$

を考えよう。ユニバーサリティを仮定すれば、質量を $m_\mu \to m_\tau$ と変更し、(16.73) のモードの割合 $B = 0.178 \pm 0.001$ を考慮することでタウ粒子の寿命は

$$\tau_\tau = B\frac{192\pi^3}{G^2 m_\tau^5} = B\tau_\mu \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 = (2.85 \pm 0.02) \times 10^{-13}\ \mathrm{s} \tag{16.74}$$

と求まる。実験値は $(2.91 \pm 0.02) \times 10^{-13}$ s であり、おおよそ一致している。(タウ粒子の実験は難しく、その実験誤差も大きいことに注意せよ。)