10.5　異常磁気能率

vertex 補正から異常磁気モーメントが現れること (9.6.1) を確認しよう。vertex 補正 Λ^μ の赤外 cut-off を考慮し、次元正則化を行うと

$$e_0^2\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{N^\mu(p',p,k)}{(k^2-\lambda^2+i\varepsilon)\left[(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon\right]\left[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right]} \tag{10.55}$$

ここに

$$N^\mu(p',p,k) = \gamma^\alpha(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma_\alpha \tag{10.56}$$

である。Feynman の積分 (10.11b) を用いれば

$$e_0^2\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int d^Dk\frac{2N^\mu(p',p,k)}{\left[k^2-2k(p'y+pz)-r+i\varepsilon\right]^3} \tag{10.57}$$

但し

$$r \equiv \lambda^2(1-y-z)-y(p'^2-m^2)-(p^2-m^2) \tag{10.58}$$

ここで変数変換

$$t^\mu = k^\mu - a^\mu \equiv k^\mu-(p'y+pz)^\mu \tag{10.59}$$

を行えば

$$e_0^2\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int d^Dt\frac{2N^\mu(p',p,k)}{\left[t^2-r-a^2+i\varepsilon\right]^3} \tag{10.60}$$

となる。

$$N^\mu(p',p,t+a) = \sum_{i=0}^{2}N_i^\mu(p',p) \tag{10.61}$$

便宜のために、t の冪ごとに項を分けると

$$N_0^\mu(p',p) \equiv \gamma^\alpha(\not{p}'-\not{a}+m)\gamma^\mu(\not{p}-\not{a}+m)\gamma_\alpha \tag{10.62a}$$

$$N_1^\mu(p',p) \equiv -\gamma^\alpha\left[\not{t}\gamma^\mu(\not{p}-\not{a}+m)+(\not{p}'-\not{a}+m)\gamma^\mu\not{t}\right]\gamma_\alpha \tag{10.62b}$$

$$N_2^\mu(p',p) \equiv \gamma^\alpha\not{t}\gamma^\mu\not{t}\gamma_\alpha \tag{10.62c}$$

これに伴い

$$e_0^2\Lambda^\mu(p',p) = \sum_{i=0}^{2}e_0^2\Lambda_i^\mu(p',p) \tag{10.63a}$$

と書く。ここに

$$e_0^2\Lambda_i^\mu(p',p) = \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int d^Dt\frac{2N_i^\mu(p',p)}{\left[t^2-r-a^2+i\varepsilon\right]^3} \tag{10.63b}$$

(10.32) より $\Lambda_1^\mu = 0$ となる。まず Λ_2^μ から計算しよう。(10.33) より

$$e_0^2\Lambda_2^\mu(p',p) = \frac{\widetilde{e_0}^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(3)}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{\gamma^\alpha\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\alpha}{[r+a^2]^{2-\frac{D}{2}}} \tag{10.64}$$

$D = 4-\eta$ とおいて $\eta \to 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
e_0^2\Lambda_2^\mu(p',p) &= \frac{\widetilde{e_0}^2\mu^\eta}{(4\pi)^{2-\frac{\eta}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{\gamma^\alpha\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\alpha}{[r+a^2]^{\frac{\eta}{2}}} \\
&= \frac{\widetilde{e_0}^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{2}(4\pi)^{\frac{\eta}{2}}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\,(2-\eta)^2\,\gamma^\mu\left\{\frac{r+a^2}{\mu^2}\right\}^{-\frac{\eta}{2}} \\
&\approx \gamma^\mu\frac{\widetilde{e_0}^2}{8\pi^2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\left(\frac{2}{\eta}-\gamma\right)\left(1+\frac{\eta}{2}\ln 4\pi\right)(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\ln\left[\frac{r+a^2}{\mu^2}\right]\right) \\
&\xrightarrow{\eta\to 0} \gamma^\mu\frac{\widetilde{e_0}^2}{8\pi^2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\left\{\left(\frac{2}{\eta}-\gamma+\ln 4\pi\right)-2-\ln\left[\frac{r+a^2}{\mu^2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{10.65}$$

vertex 補正の内、observable な部分 Λ_c^μ は

$$\Lambda^\mu(p',p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p',p) \tag{9.53}$$

で定義されていた。ガンマ行列の数をみれば (10.65)(発散部分) は $L\gamma^\mu$ に含まれることが分かり、Λ_c^μ は確かに有限である (?)。
異常磁気能率を導くために静的な外場による電子の散乱を考える。vertex 補正による不変振幅は

$$\mathscr{M} = ie_0\bar{u}(\boldsymbol{p}')e_0^2\Lambda^\mu(p',p)u(\boldsymbol{p})A_{e\mu}(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}) \tag{10.66}$$

不変振幅に Lorentz 不変性を課したときのもっとも一般的な表式は

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}')e_0^2\Lambda^\mu(p,p')u(\boldsymbol{p}) = \bar{u}(\boldsymbol{p}')\left[a\gamma^\mu + b(p^\mu+p'^\mu) + c(p^\mu-p'^\mu)\right]u(\boldsymbol{p})$$

であり、ここでゲージ条件

$$q_\mu A_e^\mu(\boldsymbol{q}) = 0 \tag{10.67}$$

と Goldon 恒等式

$$2m\bar{u}_s(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu\bar{u}_r(\boldsymbol{p}) = \bar{u}_s(\boldsymbol{p}')\left[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\right]\bar{u}_r(\boldsymbol{p}) \tag{A.80}$$

を用いれば、不変振幅は次の形に書ける：

$$\mathscr{M} = ie_0\bar{u}(\boldsymbol{p}')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)\right]u(\boldsymbol{p})A_{e\mu}(\boldsymbol{q}) \tag{10.68}$$

磁気能率に寄与するのは第二項である。(10.65) より Λ_2 は寄与を持たないから、Λ_1 について考えればよい。$D=4-\eta$ として

$$\begin{aligned}
e^2\Lambda(p',p) &= \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\int d^{D-\eta}t\frac{2N_0^\mu(p',p)}{\left[t^2-r-a^2+i\varepsilon\right]^3} \\
&= \frac{-i\widetilde{e_0}^2\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}}i\pi^{2-\frac{\eta}{2}}(-1)^{4-\eta}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma(3)}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{2N_0^\mu(p',p)}{(r+a^2)^{1-\frac{\eta}{2}}} \\
&= \frac{\widetilde{e_0}^2\mu^\eta}{(4\pi)^{2-\frac{\eta}{2}}}\Gamma\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{N_0^\mu(p',p)}{(r+a^2)^{1-\frac{\eta}{2}}} \\
\bar{u}(\boldsymbol{p'})e^2\Lambda(p',p)u(\boldsymbol{p}) &\xrightarrow{\eta\to 0} \frac{-\alpha}{4\pi}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{\bar{u}(\boldsymbol{p'})N_0^\mu(p',p)u(\boldsymbol{p})}{r+a^2} \qquad (10.69)
\end{aligned}$$

を得る (符号?)。煩雑な計算を進めて (10.68) と比較すれば

$$F_2(q^2)=\frac{m^2\alpha}{\pi}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{(y+z)(1-y-z)}{\lambda^2(1-y-z)+(p'y+pz)^2}$$

となる $\left(p^2=p'^2=m^2\right.$を使う$\left.\right)$。$\lambda\to 0$ の極限をとり $p'=p$(静的な場の条件) とすると

$$F_2(0)=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\frac{1-y-z}{y+z}=\frac{\alpha}{2\pi} \qquad (10.70)$$