別冊 5章 Dirac方程式 前半　　　　高橋 樹

・Dirac方程式の導入

$$\hat{H}\psi = (c\alpha\cdot\hat{p} + \beta mc^2)\psi \quad と \quad \hat{H}^2\psi = (c^2\hat{p}^2 + m^2c^4)\psi$$

・α, βの条件 … $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$はすべて反可換、$\beta^2 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1$

(1) $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$は1次独立　(2) β, α_iはエルミート　(3) β, α_iの固有値は± 1、トレースは0

(4) β, α_iは偶数次元　(5) β, α_iは4次元以上の行列

・γ行列の定義

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3) \quad \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

・γ行列の性質 → 別紙参照

(1) γ行列の積で作られる独立な基底は16個 … βとα_iの積

$$(I, \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^5, \sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}, \sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}, \gamma^5\gamma^0, \gamma^5\gamma^1, \gamma^5\gamma^2, \gamma^5\gamma^3)$$

(2) 積　(3) 交換・反交換関係　(4) エルミート・反エルミート　(5) 逆行列　(6) 行列式　(7) トレース

・ファインマンのスラッシュ記法　$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu$　(ただし $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$)

・γ行列の公式

(1) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$　　(3) $\not{A}\not{A} = A_\mu A^\mu$

(2) $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$、$\gamma^{5\dagger} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^0$　　(4) $\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} = 2A_\mu B^\mu$

(5) $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$、$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$、$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta}$、$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha$、…

(6) ―――、$\gamma_\mu\not{A}\gamma^\mu = -2\not{A}$、$\gamma_\mu\not{A}\not{B}\gamma^\mu = 4A_\mu A^\mu$、$\gamma_\mu\not{A}\not{B}\not{C}\gamma^\mu = -2\not{C}\not{B}\not{A}$、…

(7) $T_r(\gamma^\mu) = 0$、$T_r(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$、$T_r(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0$、…

(8) $T_r(\not{A}) = 0$、$T_r(\not{A}\not{B}) = 4A_\mu B^\mu$、$T_r(\not{A}\not{B}\not{C}) = 0$、…

・γ行列の具体的な表現

(1) Dirac－Pauli表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Weyl表現 (カイラル表現とも)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(3) Majorana表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$$

・線形代数の復習

① 相似変換 $A' = P^{-1}AP$ で固有値と行列式とトレースは不変。

② 固有値の和はトレースに等しい。

③ 固有値の積は行列式に等しい。

④ $|AB| = |A||B|$、$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

⑤ $T_r(A+B) = T_r(A) + T_r(B)$

⑥ $T_r(AB) = T_r(BA)$

・Dirac方程式　$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \mu)\psi = 0$　$(\mu \equiv \frac{mc}{\hbar})$

・随伴方程式　$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \mu\bar{\psi} = 0$　ただし $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$

・電流密度と連続の式

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad , \quad j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) = cq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = cq(\psi^\dagger\psi, -i\psi^\dagger\sigma^{0k}\psi) \quad (k=1,2,3)$$

・自由粒子の平面波解

Dirac方程式の解を $\psi = u(\boldsymbol{p})e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}$ とおく。$p^\mu = (\frac{E}{c}, \boldsymbol{p})$、$E_p \equiv c\sqrt{m^2c^2 + \boldsymbol{p}^2}$ とする。

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \Rightarrow (\not{p} - mc)u(\boldsymbol{p}) = 0 \Rightarrow \hat{H}u(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c + \beta mc^2)u(\boldsymbol{p}) = Eu(\boldsymbol{p})$$

〈Dirac－Pauli表現を用いた場合〉

$$\hat{H}u(\boldsymbol{p}) = Eu(\boldsymbol{p}) \Rightarrow \begin{pmatrix} mc^2 I & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & -mc^2 I \end{pmatrix} u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} u(\boldsymbol{p}) \qquad \chi^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

エネルギー固有状態の解

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3c}{+E_p + mc^2} \\ \frac{p^3c}{+E_p + mc^2} \end{pmatrix} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p^1 - ip^2)c}{+E_p + mc^2} \\ \frac{-p^3c}{+E_p + mc^2} \end{pmatrix} \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{-p^3c}{+E_p + mc^2} \\ \frac{(-p^1 - ip^2)c}{+E_p + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{(-p^1 + ip^2)c}{+E_p + mc^2} \\ \frac{p^3c}{+E_p + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{H}\psi^{(1)} = +E_p\psi^{(1)}$	$\hat{H}\psi^{(2)} = +E_p\psi^{(2)}$	$\hat{H}\psi^{(3)} = -E_p\psi^{(3)}$	$\hat{H}\psi^{(4)} = -E_p\psi^{(4)}$
$\hat{\boldsymbol{p}}\psi^{(1)} = +\boldsymbol{p}\psi^{(1)}$	$\hat{\boldsymbol{p}}\psi^{(2)} = +\boldsymbol{p}\psi^{(2)}$	$\hat{\boldsymbol{p}}\psi^{(3)} = +\boldsymbol{p}\psi^{(3)}$	$\hat{\boldsymbol{p}}\psi^{(4)} = +\boldsymbol{p}\psi^{(4)}$
(※) $\hat{h}\psi^{(1)} = +\frac{1}{2}\psi^{(1)}$	$\hat{h}\psi^{(2)} = -\frac{1}{2}\psi^{(2)}$	$\hat{h}\psi^{(3)} = +\frac{1}{2}\psi^{(3)}$	$\hat{h}\psi^{(4)} = -\frac{1}{2}\psi^{(4)}$

(※) 粒子がz軸方向に進むとき、ヘリシティーの固有状態となる。

公式：$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

・ヘリシティー

$\boldsymbol{\Sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ として、ヘリシティーを $\hat{h} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ で定義する。その固有値は $\pm\frac{1}{2}$ をとる。

$[\boldsymbol{\Sigma}, \hat{H}] \neq 0$ だが、$[\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \hat{H}] = [\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] = 0$ なので、エネルギー・運動量とヘリシティーは同時対角化可能。

$h = +\frac{1}{2}$ ：正、右巻き 　　$h = -\frac{1}{2}$ ：負、左巻き 

・Dirac方程式はスピン$\frac{1}{2}$の粒子を記述することの確認

(1) 全角運動量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$

$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c + \beta mc^2$、$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ に対して、$[\boldsymbol{L}, \hat{H}] = i\hbar(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})c$、$[\boldsymbol{S}, \hat{H}] = -i\hbar(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})c$

固有値 $\pm\frac{\hbar}{2}$　　$[\boldsymbol{J}, \hat{H}] = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{J}$は保存量

(2) 磁場中の荷電粒子

$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}c + \beta mc^2 + qcA^0$、$\hat{\boldsymbol{\pi}} \equiv \hat{\boldsymbol{p}} - q\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}})$

Dirac－Pauli表現の平面波解で非相対論極限　$(\varepsilon \equiv E - mc^2)$

$$\hat{H}\psi = E\psi \xrightarrow{NR} \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + qcA^0\right]u_A = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 \underbrace{- \frac{\hbar q}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}}_{\text{実験値} \cdots -g\frac{\hbar q}{2m}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{B}\ (g \simeq 2)} + q\phi\right]u_A = \varepsilon u_A$$