注：未だにファインマン図をどうやって入れればよいかわかってないので図はありません。ご容赦ください。

9.4　外線の繰り込み

前 2 節で photon と fermion の伝播関数に対する 2 次の自己エネルギーについて考えた。もちろん外線にも輻射補正がいる。この影響は電荷の繰り込みに限られ、他の有限の補正項が加わることはない。始状態に存在する電子に関して導出する。前節と同様に、fermion の線に自己エネルギーを加えたものを考える (Fig.9.11)。Feynman 振幅は次のように修正される。

$$u(\boldsymbol{p}) \ \to \ u(\boldsymbol{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}(ie_0{}^2(\not{p} - m)B + ie_0{}^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p))u(\boldsymbol{p}) \tag{9.38}$$

$(\not{p} - m)u(\boldsymbol{p}) = 0$、また、$\not{p} - m$ で $(\not{p} - m)\Sigma_c(p)$ は $(\not{p} - m)$ の 2 次でゼロに近づくので最後の項を落として、

$$u(\boldsymbol{p}) \ \to \ \left[1 - \frac{e_0{}^2}{\not{p} - m + i\epsilon}(\not{p} - m)B\right]u(\boldsymbol{p}) \tag{9.39}$$

と書き直せる。この式で B に比例する項は不定である。この曖昧さは section6.2 の入射電子が裸の状態から自己エネルギーの効果によって物理的な粒子に変換する “断熱仮説” を導入すると解決する。

→ 断熱仮説について

6.2 節で S 行列を導入、遷移 $|i\rangle \to |f\rangle$ の振幅が $\langle f|S|i\rangle$ とした。このとき $|i\rangle, |f\rangle$ は常套的に非摂動のハミルトニアン H_0 の固有状態として扱われる。ここでハミルトニアンの相互作用項 $H_1(t)$ を $H_1(t)f(t)$ と置き換え可とする。$f(t)$ は $-T \le t \le T$ で $f(t) = 1$ を返し、$t \to \pm\infty$ で単調に $f(t) \to 0$ となる関数で、ある定数を時間に依存する結合定数に変える働きがある。こうすることで相互作用を起こすのは $-T \le t \le T$ の間のみ (つまり十分近づいたとき) であり、$|t| \le T$ の間に起こる散乱は $t \ll -T$ や $t \gg T$ の状態に依存しない。そして、最後に $T \to \infty$ の極限を想定してやることで、最低次の計算をするにあたっては相互作用が遷移を起こす部分にのみ働くというのを表現できる。

この因子 $f(t)$ を e_0 にかけて、時間に依存する結合定数にする。前述したとおり相互作用を $t \to \pm\infty$ で断熱的に消失させるように (9.31c) を変更する。

$$\mathscr{H}_I = -e_0 f(t)\overline{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x) - \delta m[f(t)]^2\overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{9.40}$$

($f(t)$ は上記の関数で、ここでは具体形は重要ではない.)Fourier 変換で、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E)\exp^{iEt}\,dE = \int_{-\infty}^{\infty} F(E)\exp^{iqx}\,dE \qquad (q \equiv (E, \mathbf{0})) \tag{9.41}$$

とすると、$F(E)$ の規格化条件は、

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}F(E)dE=1 \tag{9.42}$$

であり、$F(E)$ は $E=0$ 付近で幅 $1/T$ のほぼ δ 関数のようなものである (実際、$F(E)\to\delta(E)$ とすると、$f(t)=1$ に戻る)。

修正された相互作用 (9.40) は多くの場合外場の相互作用のようにふるまうが、静的な外場 ${\boldsymbol{A}_e}^{\alpha}(\boldsymbol{x})$(8.85) がエネルギー保存をして 3 元運動量を保存していないのに対し、相互作用 (9.40) はその逆となっている。Fig.9.12 に示すように、このエネルギー非保存が、各バーテックスにおけるエネルギー非保存を表している (チョー図いれてぇ…)。これに対応して、(9.39) は次式に変更される。

$$u(\boldsymbol{p}) \ \to \ \left[1-\int dEdE'F(E)F(E')\frac{{e_0}^2B}{\not p-\not q-\not q'-m+i\epsilon}(\not p-\not q-m)\right]u(\boldsymbol{p}) \tag{9.43}$$

(非積分関数の分母は伝播関数部の変更 $\not p\to\not p-\not q-\not q'$ であり、分子の () 中は $\not p\to\not p-\not q$ となっている。エネルギーに関してはバーテックス周りで積分を実行しているが、これは $f(t)$ の Fourier 変換からくるものである. 図が欲しいよ….) ここで被積分関数を次のように置き換える。

$$\not p-\not q-m \ \to \ (\not p-\not q-m)-\frac{1}{2}(\not p-m)=\frac{1}{2}(\not p-2\not q-m)$$

(左辺第 2 項は $(\not p-m)u(p)=0$ より追加しても問題ない.) さらに、

$$\frac{1}{2}(\not p-2\not q-m) \ \to \ \frac{1}{2}(\not p-\not q-\not q'-m)$$

と置き換える (これはこの因子を除いた積分が q 及び q' に関して対称なので、元のものとこれらを入れ替えたものを足して 2 で割ったものを考えてやればよい)。これらの置き換えにより、

$$\begin{aligned}&\left[1-\int dEdE'F(E)F(E')\frac{{e_0}^2B}{\not p-\not q-\not q'-m+i\epsilon}\ \frac{1}{2}(\not p-\not q-\not q'-m)\right]u(\boldsymbol{p})\\ &\to \ \left(1-\frac{1}{2}{e_0}^2B\right)u(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{9.44}$$

にまで書き下せる。(9.44) 式は 2 次摂動の結果なので、(9.35) 式より、

$$u(\boldsymbol{p}) \ \to \ {Z_2}^{\frac{1}{2}}u(\boldsymbol{p}) \tag{9.45a}$$

とも書ける。今、2 次摂動によって導かれたが、すべての次数において同様の議論が成立する。

9.5 バーテックス補正

最後に Fig 9.13 にある通り、2 次のバーテックス補正について考える。バーテックスは次のように置き換えられる。

$$ie_0\gamma^\mu \ \to \ i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0\left[\gamma^\mu + {e_0}^2\Lambda^\mu(p', p)\right] \tag{9.47}$$

右辺の $\Lambda^\mu(p', p)$ は、(9.6) 式

$${e_0}^2\Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \ \gamma^\alpha iS_F(p'-k)\gamma^\mu iS_F(p-k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k) \tag{9.6}$$

より、以下

$$\begin{cases} S_F(p-k) = \dfrac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \dfrac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \\ \\ D_{F\alpha\beta}(k) = \dfrac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \end{cases}$$

を代入して (既に m は物理的なもの)、

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon}\gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon}\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon}\gamma_\alpha \tag{9.48}$$

と表わされるもので、これは $k \to 0$ で赤外発散、$k \to \infty$ で紫外発散する。よって (9.21) 式のフェルミオンの自己エネルギーループに用いたものと同様に伝播関数の置き換え (正則化) をしていく。(9.27) 式で自由粒子部の $\Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ を分離したが、同様に $\Lambda^\mu(p', p)$ においても、cut-off パラメータ Λ に対して対数発散する面倒な部分を切り離したい。Λ は自由粒子の値として次のように与えられる。

$$\overline{u}(\boldsymbol{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\boldsymbol{P}) \tag{9.49}$$

P は自由粒子の運動量ベクトル ($P^2 = m^2$), $u(\boldsymbol{P})$ は自由粒子スピノル。Lorentz 不変性により (?)、

$$= a \ \overline{u}(\boldsymbol{P})\gamma^\mu u(\boldsymbol{P}) + b \ P^\mu \overline{u}(\boldsymbol{P})u(\boldsymbol{P}) \tag{9.50}$$

ここで付録 A の Gordon 恒等式 A.80 より、

$$P^\mu \overline{u}(\boldsymbol{P})u(\boldsymbol{P}) = m \ \overline{u}(\boldsymbol{P})\gamma^\mu u(\boldsymbol{P}) \tag{9.51}$$

さて、問 A.2 に触れておく。

$$2m\overline{u}_s(p')\gamma^\mu u_r(p) = \overline{u}_s(p')[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]u_r(p) \tag{A.80}$$

を証明せよ。a_μ に関する恒等式、

$$\overline{u}_s(p')[\not{a}(\not{p} - m) + (\not{p}' - m)\not{a}]u_r(p) = 0$$

の左辺を、$\not{A}\not{B} = AB - i\sigma^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ で変形し、

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_s(p')[a_\mu p^\mu - i\sigma^{\mu\nu}a_\mu p_\nu + p'^\mu a_\mu - i\sigma^{\mu\nu}p'_\mu a_\nu - 2m\not{a}]u_r(p)\\
&= \overline{u}_s(p')[a_\mu(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}a_\mu(p'-p)_\nu - 2m\gamma^\mu a_\mu]u_r(p)
\end{aligned}$$

任意の a_μ で成立するので、整理して、

$$\overline{u}_s(p')[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]u_r(p) = 2m\overline{u}_s(p')\gamma^\mu u_r(p)$$

これを $p = p' = \boldsymbol{P}$ とすれば、(9.51) 式となる。
これらより、

$$\overline{u}(\boldsymbol{P})\Lambda^\mu(P,P)u(\boldsymbol{P}) = L\ \overline{u}(\boldsymbol{P})\gamma^\mu u(\boldsymbol{P}) \tag{9.52}$$

ここで一般の p, p' について、${\Lambda_c}^\mu(p',p)$ を、

$$\Lambda^\mu(p',p) = L\ \gamma^\mu + {\Lambda_c}^\mu(p',p) \tag{9.53}$$

と定義すると、(9.52) 式から自由粒子の 4 元運動量 P に対し、

$$\overline{u}(\boldsymbol{P}){\Lambda_c}^\mu(P,P)u(\boldsymbol{P}) = 0 \tag{9.54}$$

が成り立つ。

ここで、${\Lambda_c}^\mu(p',p)$ を (9.53) 式のように定義する motivation としては、QED が復元される $\Lambda \to \infty$ の極限では L が発散するが、第 2 項の ${\Lambda_c}^\mu(p',p)$ が有限となって良い。これを (9.48) 式から見ることができ、省略するために

$$\Delta \equiv \not{P} - \not{k} - m + i\epsilon, \quad q \equiv p - P, \quad q' \equiv p' - P$$

とすると、恒等式 (9.23) を用いて、(9.48) 式のフェルミオン伝播関数部を $\not{q}$ と $\not{q}'$ で冪展開し、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon}\gamma^\mu\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} &\equiv \frac{1}{\not{q}' + \Delta}\gamma^\mu\frac{1}{\not{q} + \Delta}\\
&= \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}'\frac{1}{\Delta} + \cdots\right)\gamma^\mu\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\not{q}\frac{1}{\Delta} + \cdots\right)
\end{aligned} \tag{9.55}$$

これを (9.48) に代入すると、$\frac{1}{\Delta}\gamma^\mu\frac{1}{\Delta}$ が $\Lambda^\mu(p',p)$ の最初の項にあたるので、$\Lambda^\mu(P,P)$ となる。また、Δ が k の 1 次なので $k \to \infty$ において対数発散する。それ以外の項では Δ が分母に多くあるので、$k \to \infty$ で収束する。

さて、(9.53) を (9.47) に代入して、

$$ie_0\gamma^\mu \ \to \ i\Gamma^\mu(p',p) = ie_0\left[\gamma^\mu(1 + {e_0}^2L) + {e_0}^2{\Lambda_c}^\mu(p',p)\right] \tag{9.56}$$

右辺の γ^μ の項が、元のバーテックス部 $ie_0\gamma^\mu$ に対して電荷繰り込みを行ったものである。ここで繰り込み定数 Z_1 を、

$$e \equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + {e_0}^2L) + O({e_0}^5) \tag{9.57}$$

と定義する。この繰り込まれた e を用いて、(9.56) 式は、

$$ie_0\gamma^\mu \;\to\; i\Gamma^\mu(p',p) = ie\left[\gamma^\mu + e^2{\Lambda_c}^\mu(p',p)\right] + O(e^5) \tag{9.58}$$

この (9.58) 式が 2 次のバーテックス補正の最終結果となる。ここでは (9.57) 式の電荷の繰り込みと、補正項 ${\Lambda_c}^\mu(p',p)$ の導入を行った。正則化された形においては物理量が well-defined であり有限となる。QED を復元しようと $\Lambda\to\infty$ の極限をとったときは L(及び Z_1) は無限大となるが、これは観測不可能な (9.57) 式にのみ影響を与える。一方で、${\Lambda_c}^\mu(p',p)$ は well-defined な極限値をとり、最低次の輻射補正を与えている。

さて、バーテックス補正の結果 (9.57) の電荷の繰り込みと、photon 及び fermion の自己エネルギー効果による (9.46) の繰り込みを組み合わせよう。各バーテックスに 1photon と 2fermion 線がつながっているので、裸の電荷 e_0 に繰り込まれた電荷としては、

$$e = e_0\frac{{Z_3}^{\frac{1}{2}}Z_2}{Z_1} \tag{9.59}$$

となる。この chapter で得られたものは 2 次摂動によるものであるが、(例のごとく) あらゆる次数で成立することが示せる (らしい)。この (9.59) をより簡単にするために、Ward 恒等式によって $\Sigma(p)$(9.4) と $\Lambda^\mu(p',p)$(9.6) が結びつけられた、以下の式

$$\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p,p) \tag{9.60}$$

これを用いる。

問 9.2:Ward 恒等式について

$$[S_F(p)]^{-1} = \not{p} - m \tag{1}$$

$$[S_F(p)][S_F(p)]^{-1} = 1 \tag{2}$$

これらから、

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\mu} = -S_F(p)\gamma^\mu S_F(p)$$

を導け。そして、

$$\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p,p) \tag{Ward 恒等式}$$

を導出せよ。

$\to$ (1) は、

$$[S_F(p)]^{-1} = \gamma^\mu p_\mu - m$$
$$\to \quad \frac{\partial[S_F(p)]^{-1}}{\partial p_\mu} = \gamma^\mu$$

(2) の両辺を p_μ で微分して、

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\mu}[S_F(p)]^{-1} + S_F(p)\frac{\partial [S_F(p)]^{-1}}{\partial p_\mu} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\mu} = -S_F(p)\gamma^\mu S_F(p)$$

ここで、(9.6) 式及び (9.4) 式より、

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu(p,p) &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\ \gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\mu iS_F(p-k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k)\\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\ \gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k)\\ &= \frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\mu}\end{aligned}$$

よって導かれた。

Ward 恒等式は Fig.9.14 で示すように、fermion の自己エネルギーのグラフ (a) と fermion プロパゲータに 0 エネルギーの photon をつなげて得られるバーテックス補正 (b) とを関係づける（バーテックス補正が fermion 自己エネルギーの微分形になる）。この (9.60) 式も (例に漏れず)2 次のみならず、高次でも適応できる。これによって高次の輻射補正の計算は大幅に楽になる。

そして、Ward 恒等式は電荷繰り込み定数 Z_1, Z_2 の関係をも含んでいる。自由粒子スピノル $u(\boldsymbol{P})$ を用いて (9.60) 式より、

$$\overline{u}(\boldsymbol{P})\frac{\partial\Sigma(P)}{\partial P_\mu}u(\boldsymbol{P}) = \overline{u}(\boldsymbol{P})\Lambda^\mu(P,P)u(\boldsymbol{P}) \tag{9.61}$$

(9.26) 式を用いて、左辺は、

$$B\ \overline{u}(\boldsymbol{P})\gamma^\mu u(\boldsymbol{P})$$

(9.53),(9.54) 式より、右辺は、

$$L\ \overline{u}(\boldsymbol{P})\gamma^\mu u(\boldsymbol{P})$$

よって、

$$B = L \tag{9.62}$$

となり、(9.35),(9.57) 式より、

$$\left.\begin{aligned}e^2 &\equiv Z_2{e_0}^2 = {e_0}^2(1-{e_0}^2B) + O\\ e &\equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1-{e_0}^2L) + O\end{aligned}\right\} Z_2 = Z_1 \tag{9.63}$$

が導かれる (2 次でやったが高次でも以下略)。これにより、(9.59) は、

$$e = e_0{Z_3}^{\frac{1}{2}} \tag{9.64}$$

と簡単になり、結局電荷の繰り込みは Z_3(光子の自己エネルギー効果、則ち真空偏極効果) だけに依存し、Z_1(バーテックス補正) や Z_2(fermion 自己エネルギー効果) には依存していない (マジか)。これは $e^\pm$ のみならず、$\mu^\pm$, $\tau^\pm$ においても (9.63),(9.64) は同様に成立し、同じ定数 Z_3 が得られることが簡単に分かる。よって、各レプトンの観測された物理的な電荷が等しければ、元の裸の粒子の電荷も等しいことが分かる。

これで 2 次補正については一先ず終了となる。結果としては、裸の電荷 e_0 を物理的な電荷 $e = e_0 {Z_3}^{\frac{1}{2}}$ に置き換えるとすれば、QED の 2 次補正としては伝播関数の自己エネルギー効果による補正は、

$$\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon} \;\to\; \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}[1-e^2\Pi_c(k^2)]+O(e^4) \tag{9.65a}$$

$$\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \;\to\; \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}[1-e^2\Sigma_c(p)]+O(e^4) \tag{9.65b}$$

そしてバーテックス補正は、

$$ie_0\gamma^\mu \;\to\; ie[\gamma^\mu + e^2{\Lambda_c}^\mu(p',p)]+O(e^5) \tag{9.65c}$$

となる。