

4.5 電磁相互作用とゲージ不変

相対論的な電子のふるまいについて考える。自由粒子の Schrödinger eq. から、電荷 q の粒子 1 つと相互作用する Sch eq. への変換は、スカラーポテンシャル $\phi(x)$ 及びベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(x)$ を用いて、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x), \quad -i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(x), \quad (4.64a)$$

である。ここで、これら 2 つのポテンシャルを 4 元ベクトルポテンシャル $A^\mu(x) = (\phi, \mathbf{A})$ でまとめて表記すると、

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow D_\mu = \left[\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu(x) \right]. \quad (4.64b)$$

となる。

この変換は Dirac eq. における電磁相互作用の導入となる。今、荷電粒子を電子とすると ($q \rightarrow -e$)、Dirac eq. は、

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi(x) = -\frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (4.65)$$

またこのとき、Lagrangian 密度は、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= c\bar{\psi}(x)(i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc)\psi(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

であり、 \mathcal{L}_0 は自由 Dirac 場の項、

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\psi}(x)(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi(x), \quad (4.67)$$

そして、 \mathcal{L}_1 は相互作用の項、

$$\mathcal{L}_1 = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)A_\mu(x), \quad (4.68)$$

である。

実はこの Lagrangian 密度は完璧なものではなく、 \mathcal{L}_{rad} として放射の効果も取り入れなければならないが、これについては後の章で触れることにする。

電磁場を考えるにあたって、物理的に重要な量は \mathbf{E} や \mathbf{B} であって、 A_μ 自体ではない。そもそも A_μ は一意には決まらず、ある関数 $f(x)$ を用いて、

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (4.69a)$$

と書ける (ゲージ変換) が、このときに物理が変わってしまっはいけないので、ゲージ変換の下で \mathcal{L} が不変となるように定めたい。(4.66) の \mathcal{L} にそのまま (4.69a) のゲージ変換を施すと、

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)\partial_\mu f(x) \quad (4.70)$$

となり、ゲージ不変でない。そこで、ゲージ変換を行う際、同時に Dirac 場の変換を行うことを要請し、

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{ief(x)/\hbar c} \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-ief(x)/\hbar c} \end{aligned} \right\}. \quad (4.69b)$$

とすると、(4.69a) 及び (4.69b) を \mathcal{L} に施して、

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu f(x) \quad (4.71a)$$

$$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu f(x). \quad (4.71b)$$

となり、 \mathcal{L} がゲージ不変であることを満たす。

ここで (4.69b) は局所的位相変換と呼ばれ、 x に依存する。特別な場合として、 $f(x) = \text{const}$ では大域的位相変換となり、これは電荷を保存する (2.4 節参照)。今、 \mathcal{L} のゲージ不変を保つのに、ポテンシャルのゲージ変換と Dirac 場の局所的位相変換を同時に行うことが要請されていたが、後にこれらの変換の組が 1 つのゲージ変換としてみなされることになる。ネーターの定理の要請からも、この変換の組から新たな保存量が見つかるということはなく、電荷の保存のみが再び要請されるのだ。

(4.68) が正しい電磁相互作用を与えているかどうかについては、例えば局所的なローレンツ不変な項やゲージ不変な項を加えると、それらが“くりこみ理論”によって制限を受け除外されるのである (11.3.2 節で見ていく)。(4.68) が正しい相互作用を表しているとして最も大きく正当化されているのは、もちろん物理的観測事実と、この相互作用をもとにした理論的予言の両側面で最も正確であるということによる。