Srednicki §4 The Spin Statics Theorem

最終目標： Spin 0 (real) scalar field にて統計性は交換関係のみが許されることを確認．

flow:
1) Lorentz invar. な interact. $\mathcal{L}_1$ の構成要件
   → unperturbed $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ として $\mathcal{L}_1$ が $\varphi^\pm$ の herm. fnc. なら適切
2) Spacelike perturb. Hamiltonian の交換可能性
   → $|\lambda| = 1$, boson にて φ_λ を構成したときに限り問題なし
3) canonic. quantiz. と 2nd quantiz. の等価性・スピン統計性
   → spin 0 では canonic., 2nd 互いに等価で boson

---

1) Lorentz invar. な interact. $\mathcal{L}_1$ の構成要件

1-i) Un perturb. の setup

- free
- Spin 0
- $H_0 = \int \widetilde{dk}\, \omega\, a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$ ← $|k_1, k_2, \cdots\rangle$ にかけると energy sum $\omega_1 + \omega_2 + \cdots$ を吐く　　(4.1) ← (3.30)
- $\widetilde{dk} = \dfrac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}$　　(3.18)
- $\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$　　(3.15)
- $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')]_\mp = (2\pi)^3 2\omega\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, else $= 0$　　(4.2) = (3.29)

boson → −, fermion → +.

1-ii) $\varphi^\pm$ 再構成

$\varphi^\pm$ の t 発展は H_0 によることを確認しとく．

$$\varphi^+(\mathbf{x}, 0) = \int \widetilde{dk}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a(\mathbf{k}), \quad \varphi^-(\mathbf{x}, 0) = \int \widetilde{dk}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a^\dagger(\mathbf{k})$$

H_0 によって t 発展

$$\varphi^+(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t} \varphi^+(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t} = \int \widetilde{dk}\, e^{ikx} a(\mathbf{k})$$

$$\varphi^-(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t} \varphi^-(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t} = \int \widetilde{dk}\, e^{-ikx} a^\dagger(\mathbf{k})$$

→ Usual herm. free field $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$

∵

φ^+ について

$$a(\mathbf{k}) H_0 = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \omega' a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}')$$

$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi^3) 2\omega'} \omega' \left(a^\dagger(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 2\omega\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') a(\mathbf{k}') \right)$$

$$= (H_0 + \omega)\, a(\mathbf{k})$$

$$\therefore\ e^{iH_0 t} a(\mathbf{k}) e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a(\mathbf{k}) (-iH_0 t)^n$$

$$= e^{iH_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i(H_0 + \omega) t)^n a(\mathbf{k})$$

$$= e^{iH_0 t} e^{-iH_0 t - ik_0 x^0} a(\mathbf{k})$$

$\because\ aH_0^n = (H_0 + \omega) a H_0^{n-1} = \cdots = (H_0 + \omega)^n a$

i.e.

$$\varphi^+(x,t) = \int \widetilde{dk}\, e^{ik\cdot x} e^{-ik_0 x^0} a(k) = \int \widetilde{dk}\, e^{ikx} a(k)$$

As well,

$$[a^\dagger(k), H_0] = -\omega$$ ≪ H_0にはa, a†が入ってるので交換に限る

$$\therefore \varphi^-(x,t) = \int \widetilde{dk}\, e^{-ik\cdot x} e^{ik_0 x^0} a^\dagger(k) = \int \widetilde{dk}\, e^{-ikx} a^\dagger(k)$$

1-iii) $\varphi^\pm$ の Lorentz invar.

proper かつ orthochron. 7な Λ について Scalar φ の Lorentz invar. より

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\rightarrow U(\Lambda^{-1})a(k)U(\Lambda) = a(\Lambda^{-1}k),\quad U(\Lambda)^{-1}a^\dagger(k)U(\Lambda) = a^\dagger(\Lambda^{-1}k) \qquad (4.7) = (3.34)$$

$\because$

$$U^{-1}\varphi U \overset{(3.19)}{=} \int \underbrace{\widetilde{dk}}_{\text{invar.}}\, U^{-1}a(k)U \underbrace{e^{ikx}}_{\text{invar.}} + h.c.$$

$$\varphi(\Lambda^{-1}x) = \int \widetilde{dk}\, a(k)\, e^{ik_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu}$$

$$k_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\nu{}^\mu k_\mu x^\nu = (\Lambda k)_\nu x^\nu \qquad \because \Lambda : x \to x' \text{ then } \Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu},\ \Lambda_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

$$= \int \widetilde{dk}\, a(k)\, e^{i(\Lambda k)x}$$

$$= \int \underbrace{\widetilde{d(\Lambda^{-1}k)}}_{\text{invar.} = \widetilde{dk}}\, a(\Lambda^{-1}k)\, e^{ikx}$$

$\varphi^\pm$ それぞれ単独で invar.

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi^\pm(x)U(\Lambda) = \varphi^\pm(\Lambda^{-1}x)$$

$\therefore$ interaction の $\mathcal{L}_1$ は $\varphi^\pm$ の herm. func. として構成すれば……

2) Space like perturb. Hamiltonian の交換可能性

2-i) perturb. $\mathcal{H}$ の構成

cf. interact. pic.

S-eq.

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = (H_0 + V)|\psi(t)\rangle_S$$

に対して interaction pic.

$$V_I = e^{iH_0 t} V_S e^{-iH_0 t}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t}|\psi(t)\rangle_S$$

を与えると

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = i\frac{d}{dt}e^{iH_0 t}|\psi(t)\rangle_S = \left(-H_0 e^{iH_0 t} + e^{iH_0 t}(H_0 + V_S)\right)|\psi(t)\rangle_S = V_I(t)|\psi(t)\rangle_I$$

逐次積分

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_I - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, V_I(t_1)|\psi(t_1)\rangle_I$$

$$= |\psi(t_0)\rangle_I - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, V_I(t_1)|\psi(t_0)\rangle_I - i\int_{t_0}^{t} dt_1 V_I(t_1)\left(-i\right)\int_{t_0}^{t_1} dt_2\, V_I(t_2)|\psi(t_2)\rangle_I$$

$$= \cdots$$

$$= \left[1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\, V_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t\geq t_1 \geq t_2 \geq t_0} dt_1 dt_2\, V_I(t_1) V_I(t_2) + \cdots \right] |\psi(t_0)\rangle_I$$

$$= \left[1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\, V_I(t_1) + (-i)^2 \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T\, V_I(t_1) V_I(t_2) + \cdots \right] |\psi(t_0)\rangle_I$$

$$= T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\, V_I(t')\right) |\psi(t_0)\rangle_I$$

$t=-\infty$ の $|i\rangle$ から $t=\infty$ の $|f\rangle$ への遷移確率

$$T_{f\leftarrow i} = \langle f| T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I(t)\right)|i\rangle \qquad (4.9)$$

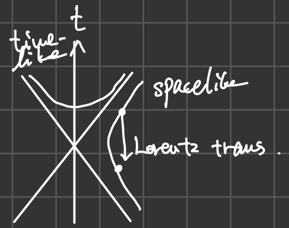
$$H_I(t) \equiv e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} \qquad (4.10)$$

$$H_1 = \int d^3x\, \mathcal{H}(x,0) \quad : \text{Schröd. pic. perturb.}$$

$\mathcal{H}_1$ は $\varphi^{\pm}(x,0)$ の herm. fnc.

$$\mathcal{H}_I(x,t) = e^{iH_0 t}\mathcal{H}_1 e^{-iH_0 t} \quad : \mathcal{H}_1 \text{ の } \varphi^{\pm}(x,0) \text{ を } \varphi^{\pm}(x,t) \text{ に替えたもの.}$$

2-ii) Spacelike perturb. $\mathcal{H}$ 交換性



$T_{f\leftarrow i}$ が Lorentz invar. ⇒ T積の結果は frame に依らない

- $(x-x')^2<0$ (timelike) ⇒ time ordering は frame indep.
- $(x-x')^2>0$ (spacelike) ⇒ 〃 dependent

Spacelike だと time order が入替る ― T積の結果が変わらないように

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \quad \text{whenever } (x-x')^2>0. \qquad (4.11)$$

« $a^\dagger a$ のため交換に限る.

ここで $[\varphi^+,\varphi^+]=[\varphi^-,\varphi^-]=0$ だが

$$[\varphi^+(x), \varphi^-(x')] = \int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}\, e^{ikx} e^{-ik'x'} [a(k), a^\dagger(k')]_{\mp}$$

$$= \int \widetilde{dk}\, \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} e^{i(kx-k'x')} (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(k-k')$$

$$= \int \widetilde{dk}\, e^{ik(x-x')}$$

spacelike ⟶ $x^0=x'^0$ の系に trans. できる. $\widetilde{dk}$, $e^{ik(x-x')}$ 共に invar.

$$= \int \widetilde{dk}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}$$

$$= \int \frac{2\pi\, d\cos\theta\, k^2 dk}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{k^2+m^2}} e^{ikr\cos\theta} \qquad (r \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty m\,dk' \frac{m^2 k'^2}{m\sqrt{1+k'^2}} \frac{e^{ik'mr}-e^{-ik'mr}}{2i\,mk' r} \qquad (k\to mk')$$

$$= \frac{m}{4\pi^2 r}\int_0^\infty dk \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sin kmr$$

$$= \frac{m}{4\pi^2 r}\left(-\frac{d}{d(mr)}\right)\int_0^\infty dk \frac{\cos kmr}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$= \frac{m}{4\pi^2 r}\left(-\frac{d}{d(mr)}\right) K_0(mr)$$

for $mr>0$. (K_ν: 第2種 modified Bessel fnc.)

$$= \frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr)$$

$(\because K_\nu = K_{-\nu},\ K_{\nu-1} + K_{\nu+1} = -2K'_\nu)$

$$\equiv C(r) \qquad (4.11)$$

cf. アルフケン・ウェーバー「特殊関数」ver.4 pp. 91–93.

$m\to 0$ lim. でも

$$\frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) = \frac{m}{4\pi^2 r}\cdot\left(\frac{1}{mr} + O(1)\right) \longrightarrow \frac{1}{4\pi^2 r^2}$$

で, $C(r>0)\neq 0$. ($\mathrm{Re}\, z>0$ にて零点なし. cf. 森下「特殊関数とその応用」pp. 62–)

2-iii) 交換性を満たすfield

$\mathcal{H}_I$ は herm. fuc. として構成するため一般には $\varphi^{\pm}$ 両方含む → 要制限.

$$\varphi_\lambda(x) \equiv \varphi^+(x) + \lambda\varphi^-(x), \quad \varphi_\lambda^\dagger(x) \equiv \varphi^-(x) + \lambda^*\varphi^+(x) \quad (\lambda\in\mathbb{C} は任意) \qquad (4.13)$$

$$[\varphi_\lambda(x), \varphi_\lambda^\dagger(x')]_\mp = [\varphi^+, \varphi^-]_\mp + |\lambda|^2[\varphi^-, \varphi^+]_\mp = (1 \mp |\lambda|^2)C(r) \qquad (4.14)$$

$$[\varphi_\lambda(x), \varphi_\lambda(x')]_\mp = \lambda([\varphi^+, \varphi^-]_\mp + [\varphi^-, \varphi^+]) = \lambda(1\mp 1)C(r) \qquad (4.15)$$

→ $(x-x')^2>0$ で $[\mathcal{H}_I, \mathcal{H}_I]=0$ と整合性をとるには
- $|\lambda|=1$
- boson

の両条件が必要. 両条件下に限って適切に φ_λ で $\mathcal{H}_I$ を構成可.

3) canonic. quantiz. と 2nd quantiz. の等価性・スピン統計性

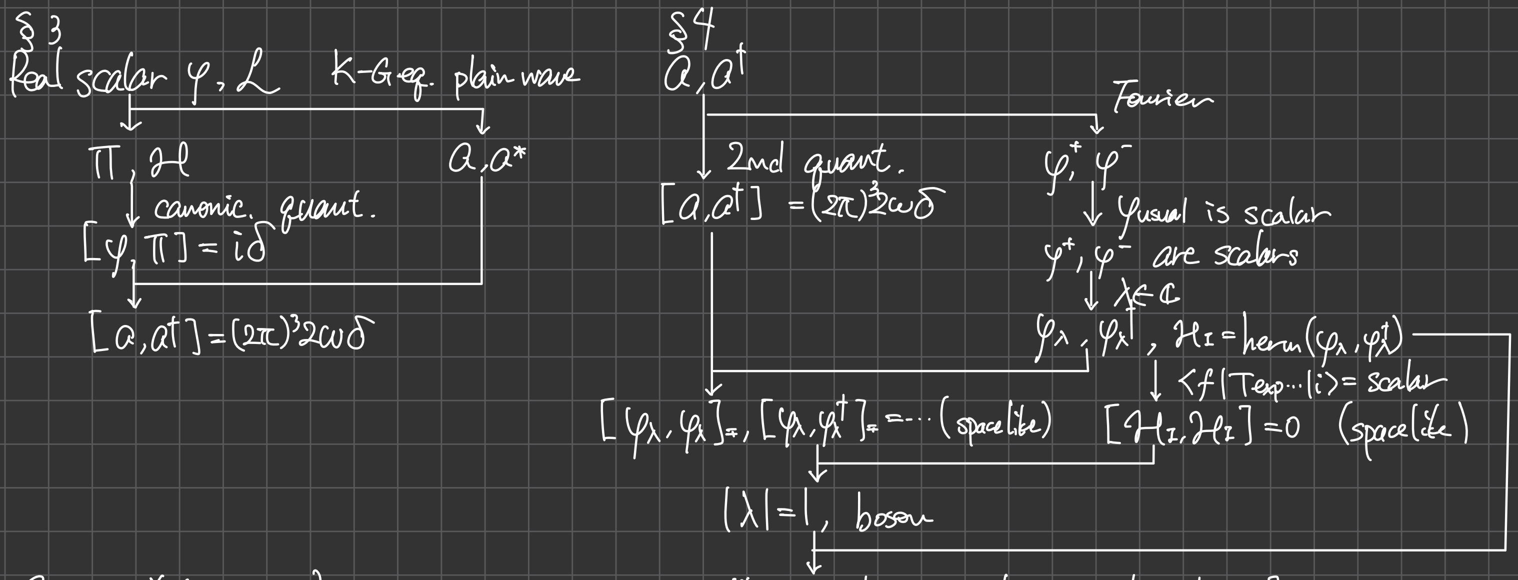
3-i) Canonic. quantiz. との等価性

$\lambda = e^{i\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ にて global に φ_λ を位相変換すると

$$\varphi = e^{-i\alpha/2}\varphi_\lambda = e^{-i\alpha/2}\varphi^+ + e^{i\alpha/2}\varphi^- \quad : \text{herm.}$$

Op. も $a(k)\to e^{i\alpha/2}a(k)$, $a^\dagger(k)\to e^{-i\alpha/2}a^\dagger(k)$ で commut. 結果同一, H_0 も同じ.

⟶ Scalar real field の理論がそのまま出てくる



§3が逆向きに再現される. $\qquad \varphi = e^{-i\alpha}\varphi_\lambda$ is herm scalar = real scalarの量子化形

3-ii) Spin統計性

φ を出発点にする論理に戻って, $\mathcal{L}$ を φ, $\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi$ で構成.

Canonical quantiz. $[\varphi(x), \varphi(x')]_\mp = 0$ for $t=t'$ $\qquad$ cf. (3.28)は $t=t'$ 前提

$$\Pi^\mu = \partial(\mathcal{L}_{free}+\mathcal{L}_I)/\partial\varphi = \partial\varphi + \text{factor}\cdot\partial\varphi$$

反交換を選ぶと, 2nd term 無視すれば

$$\{\varphi(x), \varphi(x)\} = 2\varphi(x)^2 = 0$$

$$\{\Pi^\mu(x), \Pi^\mu(x)\} = 2[\partial^\mu\varphi(x)]^2 = 0$$

∴ $\mathcal{L}$ は φ の1次までを含み φ indep. ⟶ 物理的でない $\qquad$ cf. §3, p.42下段

∴ Spin 0, real scalar field は boson のみ.

この流れは higher spin でも適用可 らしい.

com. / anti-com. のうち片方は trivial $\mathcal{L}$ を吐き出す

⟶ 許されるのは $\begin{cases} \text{int. spin} : \text{com.} \\ \text{half-int. spin} : \text{anti-com.} \end{cases}$ $\qquad$ $a, a^\dagger$ を出発点にしても等価な φ の構成に行着くらしい.