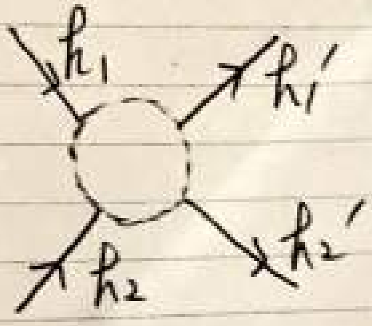
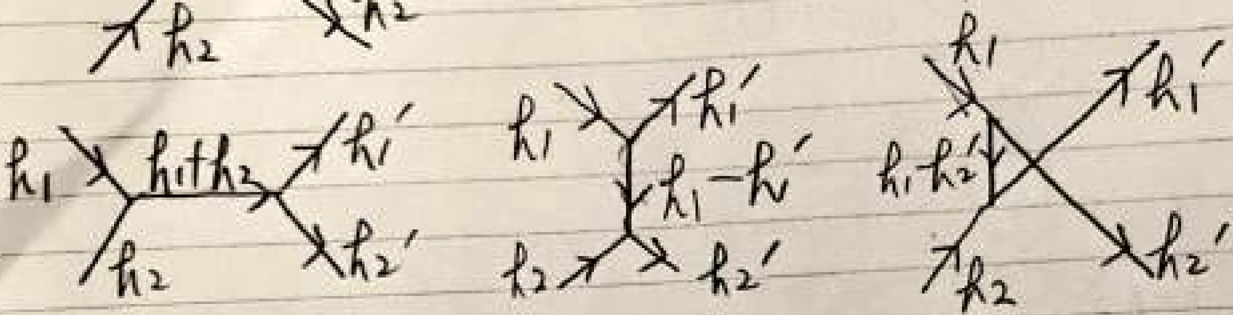
20章 1Loopでの弾性散乱

・ϕ^3での弾性散乱の振幅を補正込みで求める

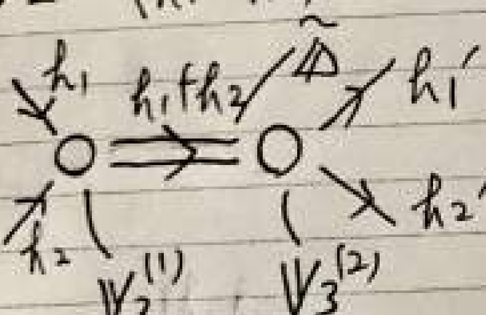


左図の散乱で、全ての1Loopの補正を含めて計算するには、

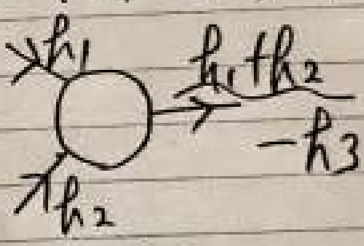


の3つのTree diagramに、V_3、$\hat{\Delta}$を適用したものと、V_4のバーテックスの場合を考えればよい。

$s=-(k_1+k_2)^2$, $t=-(k_1-k_1')^2$, $u=-(k_1-k_2')^2$,

① 

$V_3^{(1)}$は、右図から、



元々の式$V_3(k_1,k_2,k_3)$に対して、

$$
\begin{aligned}
D &= x_3x_1k_1^2 + x_3x_2k_2^2 + x_1x_2k_3^2 + m^2 \\
&= x_3x_1(-m^2) + x_3x_2(-m^2) + x_1x_2(-s) + m^2 \\
&= -x_1x_2 s + (1-(x_1+x_2)x_3)m^2
\end{aligned}
$$

これを$D_3(s)$と表記すると、

$V_3^{(1)}/g = 1 - \frac{1}{2}\alpha\int dF_3 \ln\left(\frac{D_3(s)}{m^2}\right)$,

$V_3^{(2)}$についても、$k_1 \to -k_1'$, $k_2 \to -k_2'$, $k_3 \to k_1+k_2$で、

$V_3^{(2)}/g = 1 - \frac{1}{2}\alpha\int dF_3 \ln\left(\frac{D_3(s)}{m^2}\right) \equiv V_3(s)/g$

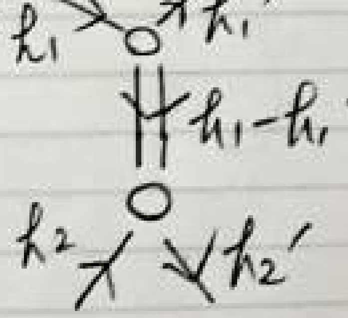
$\hat{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2+m^2-i\epsilon-\Pi(k^2)}$, $k^2=-s$が明らか、

$\Pi(-s)$について、$D_2(s) \equiv -x(1-x)s+m^2$,

$\Pi(-s) = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D_2(s)\ln\left(\frac{D_2(s)}{D_0}\right) - \frac{1}{12}\alpha(-s+m^2)$,

以上から、この過程の振幅への寄与は、

$\frac{1}{i}(iV_3(s))^2\hat{\Delta}(-s)$ となる。

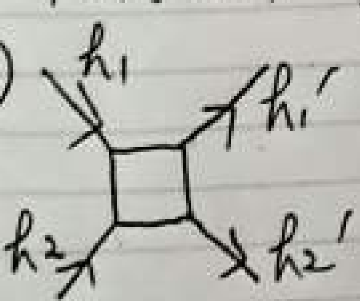
② 

tを用いることになる。同様に、

$D_3(t)$, $D_2(t)$を考えて、

$\frac{1}{i}(iV_3(t))^2\hat{\Delta}(-t)$

③ 同様に、$\frac{1}{i}(iV_3(u))^2\hat{\Delta}(-u)$

④ 

$k_3 \to -k_2'$, $k_4 \to -k_1'$,

$$D_{1234} = x_1x_4k_1^2 + x_2x_4k_2^2 + x_2x_3k_3^2 + x_1x_3k_4^2 + x_1x_2(k_1+k_2)^2 + x_3x_4(k_2+k_3)^2 + m^2$$

$$= -x_1x_4m^2 - x_2x_4m^2 - x_2x_3m^2 - x_1x_3m^2 - x_1x_2 s - x_3x_4 t + m^2 \quad (\because k_2 - k_2' = -k_1 + k_1')$$

$= -x_1x_2 s - x_3x_4 t + (1-(x_1+x_2)(x_3+x_4))m^2$,

これを $D_4(s,t)$ と表記する，D_{1324}，D_{1243} については，

$(2\leftrightarrow 3) = -x_1x_3 u - x_2x_4 t + (1-(x_1+x_3)(x_2+x_4))m^2$,

$(3\leftrightarrow 4) = -x_1x_2 s - x_3x_4 u + (1-(x_1+x_2)(x_3+x_4))m^2$

積分が $x_1\sim x_4$ の入れ換えに不変なので，$D_4(t,u)$，$D_4(u,s)$ で，

$$V_4(s,t,u) \equiv \frac{1}{6}g^2\alpha\int dF_4\left(\frac{1}{D_4(s,t)}+\frac{1}{D_4(t,u)}+\frac{1}{D_4(u,s)}\right)$$

以上から，$i\mathcal{T}_{1\text{-loop}}$

$$= \frac{1}{i}\left((iV_3(s))^2\tilde{\Delta}(-s)+(iV_3(t))^2\tilde{\Delta}(t)+(iV_3(u))^2\tilde{\Delta}(u)\right)$$
$$+iV_4(s,t,u) \quad (20.2)$$

を導く。

各項を計算していく，ここで k_1, k_2 が m とくらべて非常に大きい，

つまり，$s, |t|, |u|$ $(s>0,\ t,u<0)$ が m^2 より非常に大きい

状況を想定してみると，$D_2\sim D_4$ の m^2 を無視できる，

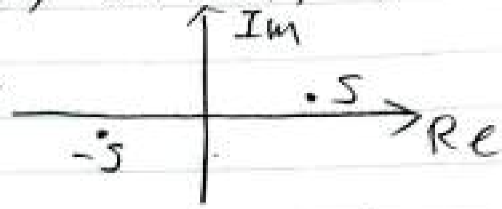
$$\Pi(-s) = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\,(m^2-x(1-x)s)\ln\frac{m^2-x(1-x)s}{(1-x(1-x))m^2} - \frac{\alpha}{12}(-s+m^2)$$
$$\approx -\frac{1}{2}\alpha s\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+\ln\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\right)+\frac{\alpha s}{12}$$
$$= -\frac{1}{12}\alpha s\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3-\pi\sqrt{3}\right)\cdots \text{Ⓐ}$$

$\tilde{\Delta}(-s) = (-s-\Pi(-s))^{-1}$ に代入すると，

$$\hat{\Delta}(-s) = -\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3-\pi\sqrt{3}\right)\right)^{-1}$$
$$= -\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3-\pi\sqrt{3}\right)+O(\alpha^2)\right)$$

ここで，$\hat{\Delta}(k^2) = \dfrac{1}{k^2+m^2-i\epsilon-\Pi(k^2)}$ を思い出して，

$s \leftrightarrow s+i\epsilon$ は右図のような位置で，



$\ln(-s) = \ln s - i\pi$，

$$V_3(s)/g = 1-\frac{1}{2}\alpha\int dF_3\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+\ln O(x_2)\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)-3\right) \cdots Ⓑ$$

$$(V_3(s))^2\hat{\Delta}(-s) = -\frac{1}{s}g^2\left(1-\frac{1}{2}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)-3\right)\right)^2$$
$$\times\left(1+\frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3-\pi\sqrt{3}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{s}g^2\left\{\left(1-\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)-3\right)\right)\left(1+\frac{1}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3-\pi\sqrt{3}\right)\right)+O(\alpha^2)\right\}$$
$$= -\frac{1}{s}g^2\left\{1+\alpha\left(-\frac{11}{12}\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+3+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{12}\sqrt{3}\right)+O(\alpha^2)\right\}$$
$$= -\frac{1}{s}g^2\left\{1-\frac{11}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}-39}{11}\right)+O(\alpha^2)\right\}$$

t, u についても同様（ただし，$\ln(-t)=\ln|t|$），

$$\int\frac{dF_4}{D_4(s,t)} = -\frac{3}{s+t}\left(\pi^2+\left(\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right)^2\right) \cdots Ⓒ$$
$$= \frac{3}{u}\left(\pi^2+\left(\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right)^2\right)，$$

$$V_4(s,t,u) = \frac{1}{2}g^2\alpha\left\{\frac{1}{s}\left(\pi^2+\left(\ln\left(\frac{t}{u}\right)\right)^2\right)+\frac{1}{t}\left(\pi^2+\left(\ln\left(\frac{u}{s}\right)\right)^2\right)+\frac{1}{u}\left(\pi^2+\left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)\right)^2\right)\right\}$$

ここで、$F(s,t,u) \equiv -\frac{1}{s}\left(1-\frac{11}{12}\alpha\left(\ln\left(-\frac{s}{m^2}\right)+\frac{6\pi^2+\pi\sqrt{3}-39}{11}\right.\right.$

$\left.\left. -\frac{1}{2}\alpha\left(\ln\left(\frac{t}{u}\right)\right)^2\right)\right)$ とすると、

$$I_{1\text{-loop}} = g^2\left(F(s,t,u)+F(t,u,s)+F(u,s,t)\right)$$

積分の計算

$$\int dF_n\, f(x) = (n-1)!\int_0^1 dx_1 \cdots dx_n\, \delta(x_1+\cdots+x_n-1) f(x)$$

$$= (n-1)!\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1}$$

$$\times f(x)\big|_{x_n=1-x_1-\cdots-x_{n-1}}$$

Ⓐ… 考え中

Ⓑ… $\int dF_3 \ln(x_1x_2) = 2\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ln(x_1x_2)$

$$= 2\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 (\ln x_1 + \ln x_2)$$

$\int_0^{1-x_1} dx_2 \ln x_1 = (1-x_1)\ln x_1$,

$$\int_0^{1-x_1} dx_2 \ln x_2 = \left[x_2\ln x_2 - x_2\right]_0^{1-x_1}$$

$$= (1-x_1)\ln(1-x_1) - (1-x_1)$$

$$\int_0^1 dx_1 (1-x_1)\ln(1-x_1) = \int_0^1 dx\, x\ln x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 dx \frac{x}{2} = -\frac{1}{4},$$

$\int_0^1 dx_1 (1-x_1) = \frac{1}{2}$,

$\int_0^1 dx_1 (1-x_1)\ln x_1 = \int_0^1 dx\, x\ln(1-x)$

$$= -\int_0^1 dx\, x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$

以上より, $\int dF_3 \ln(x_1 x_2) = 2\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -3$

©… 考え中