Section 24. Nonabelian Symmetry

松井一尭

2023 年 7 月 10 日

§1　前提

■ラグランジアン　前節で扱ったように、ラグランジアンを複素場表示から実場表示に直すと、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \tag{1}$$

となり、本節ではこれを N 個の実スカラー場に一般化したラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_i \partial_\mu \varphi_i - \frac{1}{2}m^2 \varphi_i \varphi_i - \frac{1}{16}\lambda(\varphi_i \varphi_i)^2 \tag{2}$$

■不変性　ラグランジアンに対する 2 つの不変性が言える。

$SO(N)$ 変換での不変性　回転行列 R_{ij} に対する要請

$$R^T R = \mathbf{1}, \quad \det R = 1 \tag{3}$$

から出る。

Z_2 変換に対する不変性　縮約を取る際に負号がキャンセルする。この不変性から、$SO(N)$ の議論を $O(N)$ に拡張できる。

ここからは $SO(N)$ の連続的部分群を取り扱う。

§2　無限小 $SO(N)$ 変換

N 次元空間の無限小回転

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \theta_{ij} + O(\theta^2) \tag{4}$$

を考える。実質的に変換に関与する θ_{ij} が無限小量である[*1]。

■自由度と展開　θ_{ij} をエルミート行列系列 $(T^a)_{ij}$ で展開表示することを考える。

$$\theta_{ij} = k_a (T^a)_{ij} \tag{5}$$

k_a は展開係数で、念のため複素数と断っておく。R_{ij} が実直交行列であるため、θ_{ij} は実反対称行列である。θ_{ij} を表示する展開式で、添え字 a は自由度分 $1 \to \dfrac{1}{2}N(N-1)$ と走る。N 次実直交行列の自由度は、

$$N^2 - \frac{1}{2}N(N+1) = \frac{1}{2}N(N-1) \tag{6}$$

で与えられる。規格化条件

$$\mathrm{tr}(T^a T^b) = 2\delta^{ab} \tag{7}$$

を課し、無限小量 θ^a を用いて、

$$\theta_{jk} = -i\theta^a (T^a)_{jk} \tag{8}$$

と展開できる。こうして、無限小回転角がエルミート行列で展開された。

[*1] 無限小という考え方はコーシー流の $\varepsilon - \delta$ 法には存在しない概念である。ライプニッツに始まる無限小を扱う微分積分学を発展させた超準解析で厳密に定式化される

■**反対称性**　展開に用いたエルミート行列系列 T^a を $SO(N)$ の生成行列と呼ぶ。群の定義に照らして、T^a, T^b はプロダクションに関する完全性

$$T^a * T^b \in SO(N) \tag{9}$$

を満たすのであり、プロダクションを交換関係と定義し、$SO(N)$ 群内の全要素の線形結合に対応するという具体例を

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{10}$$

とする。ただし、この考え方が妥当であるには、プロダクションとして採り得る二項関係が交換関係だけでなく、加法も採り得るという条件が必要である。c についての縮約範囲が判然としないため、$SO(N)$ 群内の全要素を使ってレンマ学的に定義した。プロダクションについて交換律

$$T^a * T^b = T^b * T^a \tag{11}$$

が成り立てばアーベル群であるが、(10) は生成エルミート行列が積に対して一般に非可換であることを示しており、非アーベル的である。ただし、$U(1), SO(2)$ では生成行列が 1 つでよいため $a = b$ であり、アーベル的になる。対角和の規格化条件を用いるなどして、

$$f^{abd} = -i\frac{1}{2}\mathrm{tr}([T^a, T^b]T^d) \tag{12}$$

を得る。エルミート行列に対する対角和の性質などを用いると、

$$f^{abd*} = f^{abd} \tag{13}$$

が導かれて f^{abd} が実と分かる。

■**$SO(3)$ の場合**　構造係数を Revi-Civita テンソルにすればよい。

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc}T^c \tag{14}$$

§3　複素スカラー場理論の場合

■**流れ**　N 複素スカラー場理論に対して、同様の考察を行う。大まかな流れは大体同じである。

- ラグランジアンは以下の形式である。

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \varphi_i^\dagger \partial_\mu \varphi_i - m^2 \varphi_i^\dagger \varphi_i - \frac{1}{4}\lambda(\varphi_i^\dagger \varphi_i)^2 \tag{15}$$

- 変換は N 次元ユニタリ変換 $U(N)$ であり、この変換のもとでラグランジアンは不変である。

$$\varphi_i(x) \to U_{ij}\varphi_j(x) \tag{16}$$

  ユニタリ行列は、行列式が 1 となる特殊ユニタリ行列と

$$U_{ij} = e^{-i\theta}\tilde{U}_{ij} \tag{17}$$

  なる関係を有し、$U(N)$ 群は $U(1)$ 群と $SU(N)$ 群の直積と等価であって、実際には $SU(N)$ 変換を議論すればよい。

- 特殊ユニタリ変換は、無限小 θ^a を用い、エルミート行列で

$$\tilde{U}_{ij} = \delta_{ij} - i\theta^a (T^a)_{ij} + O(\theta^2) \tag{18}$$

  と展開できる。自由度は $N^2 - 1$ なので、この分を添え字 a が走る。この式は、R_{ij} の書き換えに過ぎないが、そもそも実特殊直交群は特殊ユニタリ群の全要素について虚部がゼロとなった場合である。

- $SU(2)$ の例がパウリ行列やタウ行列。構造係数が $f^{abc} = 2\varepsilon^{abc}$ になることに注意。

■$SU(N)$ 行列の作り方　$SU(N)$ 行列は 3 種類ある。

1° 対角成分の上下に $-i, i$ を $N(N-1)/2$ 個並べる。$-i$ だけの上半三角と i だけの下半三角が混在し、対角成分がゼロである。

2° 上述の虚数単位を全て 1 にした行列。

3° 非対角成分が全てゼロで、対角成分に $\pm 1, 0$ が入る。最初 n 個だけ 1 を入れたら、直後に-1 を n 個入れて、残りの対角成分にはゼロを入れる[*2]。従って $N-1$ 個の要素が入る。

合計 N^2-1 個の非ゼロ要素が入る。

■$SO(2N)$ 変換　$SU(N)$ 行列は、スカラー場の実部と虚部を考慮すると、より一般な $SO(2N)$ 対称群の一部であることが分かる。

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi_{j1}(x) + i\varphi_{j2}(x)}{\sqrt{2}} \longleftarrow (\varphi_{jk}, \varphi_{jl})(j, k, l \in 2N) \tag{19}$$

参考文献

[1] 高橋礼司　『線形代数学講義 —現代数学への誘い—』　2014 年　日本評論社

[2] 中沢新一　『レンマ学』　2019 年　講談社

[3] 中田仁　『フロー式物理演習シリーズ 3　線形代数』　2013 年　共立出版

[*2] followed a single entry $-n$ 以下の文意が不明。