$$= \exp\left[\frac{i}{2}\int dt\,dt'\, f(t)\, G(t-t')\, f(t')\right]$$

を得る。ただし、ここで、

$$G(t-t') = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{-E^2+\omega^2-i\epsilon} \qquad \text{—— } (**)$$

とおいた。重要なことは、これは明らかに（$\epsilon = 0$ とすれば）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right) G(t-t') = \delta(t-t')$$

の解。すなわち $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right)q(t)=0$ の Green's fn. である。

$(**)$ の積分を実行して、

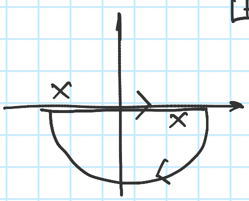
$$G(t-t') = \frac{i}{2\omega}\exp\left[-i\omega|t-t'|\right]$$

を得る。

$$G(t-t') = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E-\omega+i\epsilon)(E+\omega-i\epsilon)} \quad - (**)$$

より、$E = \omega - i\epsilon,\ -\omega + i\epsilon$ に pole をもつ。

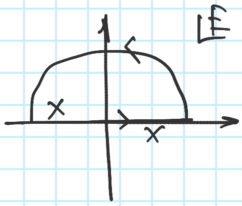
1. $t > t'$ のとき



$\Im E$

$$(**) = \frac{-1}{2\pi}\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{E=\omega-i\epsilon}\left[\cdots\right]$$
$$= -i \cdot \frac{1}{-2\omega} e^{-i\omega(t-t')}$$
$$= \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$$

2. $t < t'$ のとき



$\Im E$

$$(**) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{E=-\omega+i\epsilon}\left[\cdots\right]$$
$$= i\cdot\frac{1}{2\omega} e^{i\omega(t-t')}$$
$$= \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$$

したがって、 $G(t-t') = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$ ∎

実際、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega|t|} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-i\omega\, \mathrm{sgn}(t)\, e^{-i\omega|t|}\right)$$
$$= -i\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{sgn}(t)\right)e^{-i\omega|t|} - \omega^2 (\mathrm{sgn}(t))^2 e^{-i\omega|t|}$$
$$= \left(\frac{2\omega}{i}\delta(t) - \omega^2\right) e^{-i\omega|t|}$$