Part 2

§50 Massless particles and spinor helicity

§50 Massless particles and spinor helicity

◎ massless particleのscattering Amplitudeをより簡単に記述するために'spinor helicity'を導入する
→ spin stateごとのscattering Amplitudeも求まる

massless particleなので相対論的極限を考える

(38.31)より
$$\begin{cases} u_s(\mathbf{p})\,\overline{u_s}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1+s\gamma_5)(-\not{p}) \\ v_s(\mathbf{p})\,\overline{v_s}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1-s\gamma_5)(-\not{p}) \end{cases}$$

(※ massless limitで $v_s(\mathbf{p}) = u_{-s}(\mathbf{p})$ より、以下 u_s のみを考える)
Prob 50.2 b)を参考に v_s, u_s を具体的に表せば示せる

$p_{a\dot{a}} \equiv p_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{a}}$ を導入

$$p^{\dot{a}a} = \varepsilon^{ac}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} p_{c\dot{c}} = \underline{\varepsilon^{ac}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\sigma^\mu{}_{c\dot{c}}}\, p_\mu \overset{(35.19)}{=} \underline{\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}}\, p_\mu$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} u_-(\mathbf{p})\,\overline{u}_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(-\not{p}) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}(-p_\mu) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -p_\mu\sigma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_{a\dot{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(50.7)より $u_-(\mathbf{P})$ の下2成分は0

((38.6)はmasslessでは使えないことに注意)

よって $u_-(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \phi_a \\ 0 \end{pmatrix}$ と書ける

※Prob 50.2は最後

ϕ_a : twisterは それ同士で交換する

このとき $\bar{u}_-(\mathbf{P}) \equiv u_-^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \phi^*_{\dot{a}} \end{pmatrix}$

($\underbrace{\phi^*_{\dot{a}} = (\phi_a)^*}_{\text{Weyl fieldのときは } \psi^\dagger_{\dot{a}} = (\psi_a)^\dagger \text{であった}}$ としている)

$$u_-(\mathbf{P})\,\bar{u}_-(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 0 & \phi_a\phi^*_{\dot{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(50.7)と比較して、 $p_{a\dot{a}} = -\phi_a\phi^*_{\dot{a}}$

(38.4) $\left(u^*_-(-\mathbf{P}) = -C\gamma_5 u_+(\mathbf{P})\right)$ より

$$u_+(\mathbf{P}) = -\gamma_5 C^{-1} u^*_-(-\mathbf{P})$$

$$= -\begin{pmatrix} -\delta_a{}^b & \\ & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varepsilon_{bc} & \\ & -\varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} \end{pmatrix}(\beta u_-(\mathbf{P}))^*$$

$(\because (40.31), (40.30), (38.32))$

$$= \begin{pmatrix} -\varepsilon_{ac} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^*_{\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{*\dot{c}} \end{pmatrix}$$

よって $u_+(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{*\dot{a}} \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_+(\mathbb{P}) = u_+(\mathbb{P})^\dagger \gamma^0 = (\phi^a, 0)$$

これらより

$$u_+(\mathbb{P})\bar{u}_+(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi^{*\dot{a}}\phi^a & 0 \end{pmatrix}$$

一方で $u_+(\mathbb{P})\bar{u}_+(\mathbb{P}) \overset{(5.0.1)}{=} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(-\not{P})$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} (-P_\mu)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_\mu \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p^{\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix}$$

と比較して、$\phi^{*\dot{a}}\phi^a = -p^{\dot{a}a}$

$$P_{a\dot{a}} = P_\mu \sigma^\mu = -I p^0 + \mathbb{P}\cdot\sigma = \begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix}$$

$P_{a\dot{a}}$ は massless limit で

$$\det(P_{a\dot{a}}) = (p^0)^2 - \mathbb{P} = 0$$

一般に行列Aの固有値を λ_i とすると $\det A = \prod_i \lambda_i$ なので

$P_{a\dot{a}}$ は固有値0を持つ

$P_{a\dot{a}}$ は hermite 行列なのでスペクトル分解でき、

$$P_{a\dot{a}} = \lambda|\phi_a\rangle\langle\phi_a| \xrightarrow{\text{規格化}} -\phi_a\phi^*_{\dot{a}}$$

(nonzero 固有値の固有空間への射影演算子)

Thm (スペクトル分解)

A が正規行列 ($AA^\dagger = A^\dagger A$)

$\Rightarrow$ A の固有値 λ_i と固有ベクトル $|\lambda_i\rangle$ をとって

$A = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ とできる

$P_{a\dot{a}}, k_{a\dot{a}}$ に対応する twistor をそれぞれ ϕ_a, κ_a とする

($P_{a\dot{a}} = -\phi_a\phi^*_{\dot{a}}$, $k_{a\dot{a}} = -\kappa_a\kappa^*_{\dot{a}}$)

$[Pk] \equiv \phi^a\kappa_a$ を導入する

$$[kP] = \kappa^a\phi_a = \overset{\times(-1)}{\varepsilon^{ab}}\kappa_a\phi_b = -\phi^a\kappa_a = -[\phi k]$$

(50.8)(50.14) より $\bar{u}_+(\mathbb{P})\, u_-(\mathbb{k}) = [Pk]$

$\langle Pk\rangle \equiv \phi^*_{\dot{a}}\kappa^{*\dot{a}}$ とすると

$\langle Pk\rangle = [kP]^*$ $\quad\therefore \langle Pk\rangle = -\langle kP\rangle$

(50.10)(50.13) より $\bar{u}_-(\mathbb{P})\, u_+(\mathbb{k}) = \langle Pk\rangle$

一方で、$\bar{u}_+(p)u_+(k)=\bar{u}_-(p)u_-(k)=0$

$$\langle pk\rangle[kp]=(\phi^*_{\dot a}k^{*\dot a})(k^a\phi_a)$$
$$=(\phi_a\phi^*_{\dot a})(k^{*\dot a}k^a)$$
$$=p_{a\dot a}k^{\dot a a}$$
$$=p^\mu\underbrace{\sigma_{\mu a\dot a}\,k_\nu\,\bar\sigma^{\nu\dot a a}}_{=-2}$$
$$=-2p^\mu k_\mu$$

$\because$ (35.19) より

$$\bar\sigma^{\mu\dot a a}\sigma_{\mu b\dot b}=\varepsilon^{ac}\varepsilon^{\dot a\dot c}\sigma^\mu{}_{c\dot c}\sigma_{\mu b\dot b}$$
$$\overset{(35.4)}{=}\varepsilon^{ac}\varepsilon^{\dot a\dot c}(-2\varepsilon_{cb}\varepsilon_{\dot c\dot b})$$
$$=-2\delta^a_b\delta^{\dot a}_{\dot b}$$

これらを用いて $e^-\varphi\to e^-\varphi$ の scattering Amplitude を書きかえていく

$\tilde{S}(p)=-\dfrac{\not p}{p^2}$ とおくと、

(45.16) より $T_{s's}=g^2\bar{u}_{s'}(p')[\tilde{S}(p+k)+\tilde{S}(p-k')]u_s(p)$

scalar field φ も massless のとき、$(p+k)^2=2p\cdot k$, $(p-k')^2=-2p\cdot k'$

また、massless の Dirac eq. より、$\not{p}u_s = 0$ を用いると

$$T_{s's} = g^2 \bar{u}_{s'}(\not{p}') \left[\frac{-\not{k}}{2p\cdot k} + \frac{-\not{k}}{2p\cdot k'} \right] u_s(\not{p})$$

分子について

(50.13) (50.14) より

$$-\not{k} = -\begin{pmatrix} 0 & k^\mu \sigma_{\mu a\dot{a}} \\ k_\mu \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & k_{a\dot{a}} \\ k^{\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_a k^*_{\dot{a}} \\ k^{*\dot{a}} k^a & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\bar{u}_+(\not{p}')(-\not{k})u_+(\not{p}) = \phi'^a k_a k^*_{\dot{a}} \phi^{*\dot{a}}$

$$= [p'k]\langle kp\rangle$$

$$\bar{u}_-(\not{p}')(-\not{k})u_-(\not{p}) = \phi'^*_{\dot{a}} k^{*\dot{a}} k^a \phi_a$$

$$= \langle p'k\rangle [kp]$$

また、$\bar{u}_-(\not{p}')(-\not{k})u_+(\not{p}) = (0 \ \circledcirc)\begin{pmatrix} 0 & \circledcirc \\ \circledcirc & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \circledcirc \end{pmatrix} = 0$

同様に $\bar{u}_+(\not{p}')(-\not{k})u_-(\not{p}) = 0$

分母について

(50.24) より $2p\cdot k = -\langle pk\rangle[pk]$

$$2p\cdot k' = -\langle pk'\rangle [pk']$$

以上より

$$T_{++} = -g^2\left(\frac{[p'k]}{[pk]} + \frac{[p'k']}{[pk']}\right)$$

$$T_{--} = -g^2\left(\frac{\langle p'k\rangle}{\langle pk\rangle} + \frac{\langle p'k'\rangle}{\langle pk'\rangle}\right)$$

$$T_{+-} = T_{-+} = 0$$

prob 50.2

a) (50.9), (50.15) から (50.12) を示す

$$\phi_a = \sqrt{2w}\begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{-i\varphi} \\ \cos(\frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} \quad (50.9)$$

$w = |\mathbf{p}|$, (θ, φ) は $\mathbf{p}$ の向きを指定する変数

$$\phi_a \phi_a^* = 2w\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2w\begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$-$ なので $p^0 = \sqrt{\mathbb{P}^2} = \omega$,

$$\mathbb{P} = (\omega \sin\theta\cos\varphi, \omega\sin\theta\sin\varphi, \omega\cos\theta)$$

$$P_{a\dot{a}} = \begin{pmatrix} -p^0+p^3 & p^1-ip^2 \\ p^1+ip^2 & -p^0-p^3 \end{pmatrix} \qquad (50.15)$$

$$= \omega \begin{pmatrix} -1+\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -1+\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= 2\omega \begin{pmatrix} -\sin^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

よって $P_{a\dot{a}} = -\phi_a\phi_{\dot{a}}^*$ (50.12)

b) (38.12) から真面目に boost して (50.8) (50.9) を出す

(38.12) より

$$u_-(\mathbb{P}) = \exp(i\eta\hat{\mathbb{P}}\cdot\mathbb{K})\sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \exp(i\eta K^3)\sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (\hat{\mathbb{P}} = (0.0.1))$$

$$= \exp\left(-\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & \\ & -\sigma^3\end{pmatrix}\right)\sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{P.239 上部より} \\ \because K^3 = \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & \\ & -\sigma^3\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} & & & \\ & e^{\frac{\eta}{2}} & & \\ & & e^{\frac{\eta}{2}} & \\ & & & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\because \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{\eta}{2}} \\ 0 \\ e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\frac{|\mathbb{P}|}{\sinh \eta}} \\ 0 \\ e^{-\frac{\eta}{2}} \sqrt{\frac{|\mathbb{P}|}{\sinh \eta}} \end{pmatrix} \qquad \left(\because \sinh \eta = \frac{|\mathbb{P}|}{m} \right)$$

$$\xrightarrow{\eta \to \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2|\mathbb{P}|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

((50.8), (50.9) と一致)

$$\left(\because \frac{e^{\frac{\eta}{2}}}{\sqrt{\sinh \eta}} = \sqrt{2} \frac{e^{\frac{\eta}{2}}}{\sqrt{e^{\eta} + e^{-\eta}}} \xrightarrow[\eta \to \infty]{} \sqrt{2} \right)$$

(50.13) についても同様