5. The LSZ reduction formula

① 散乱過程の描像（自由場→自由場）
② （自由場の）生成消滅演算子.
③ ①, ② を用いた scattering amplitude の記述（LSZ formula）
④ ① の描像の正当性

①

（運動量 $\mathbb{k}$ の）1粒子状態は真空に生成演算子が作用したもの.

$$|k\rangle = a^{\dagger}(\mathbb{k})|0\rangle \qquad a^{\dagger}(\mathbb{k}) = -i\int d^3x\, e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x)$$

真空は消滅演算子で anihilate され. 規格化されている.

この節は Heisenberg picture で話をしている.

$$a(\mathbb{k})|0\rangle = 0 \qquad \langle 0|0\rangle = 1$$

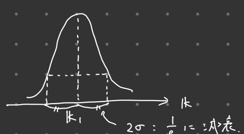
これらを用いると. $\langle k|k'\rangle$ は Lorentz inv. な形で規格化されていることが分かる.

$$\langle k|k'\rangle = (2\pi)^3 2\omega\, \delta^{(3)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

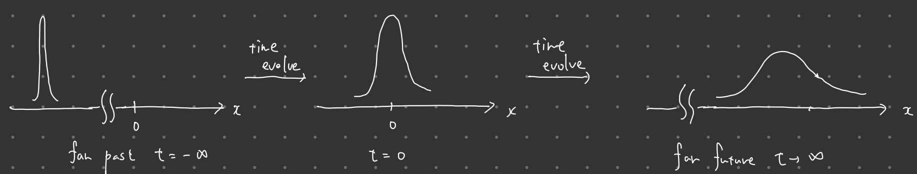
$$\because)\ \langle k|k'\rangle = \langle 0|a(\mathbb{k})a^{\dagger}(\mathbb{k}')|0\rangle$$
$$= \langle 0|[a(\mathbb{k}), a^{\dagger}(\mathbb{k}')] - a^{\dagger}(\mathbb{k}')a(\mathbb{k})|0\rangle$$
$$= (2\pi)^3 2\omega\, \delta^{(3)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}') \qquad \because)\ [a(\mathbb{k}), a^{\dagger}(\mathbb{k}')] = (2\pi)^3 2\omega\, \delta^{(3)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

Def $\mathbb{k} = \mathbb{k}_1,\ x = 0$ に局在した粒子の生成演算子.

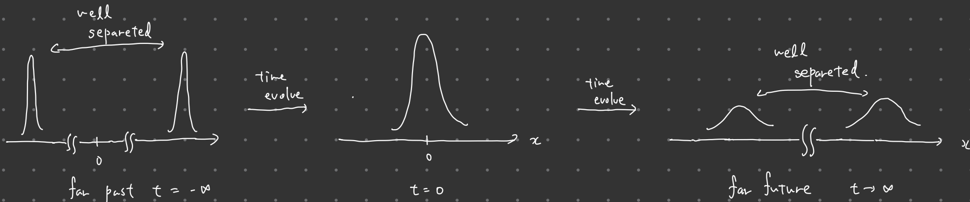
$$a_1^{\dagger} := \int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\, a^{\dagger}(\mathbb{k}) \qquad f_1(\mathbb{k}) \propto \exp\left[-\frac{(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)^2}{4\sigma^2}\right]$$



このような波束の時間発展の描像



自由場で $t=0,\ x=0$ で運動量の異なる $(\mathbb{k}_1 \neq \mathbb{k}_2)$ 2つの wave packet



相互作用を考える場合でも上のように. far past / future では. 2つの wave packet が十分に離れて. 独立に動いているとみなす

この仮定をすると. $a^{\dagger}(\mathbb{k})$ は time dependent で initial state と final state は.

$$|i\rangle = \lim_{t\to-\infty} a_1^{\dagger}(t)\, a_2^{\dagger}(t)|0\rangle \qquad |f\rangle = \lim_{t\to+\infty} a_{1'}^{\dagger}(t)\, a_{2'}^{\dagger}(t)|0\rangle$$

⇐ 相互作用の前後では. 運動量の分布 $f(\mathbb{k})$ なども変わったりするので creation operator も一般に異なる

Schrödinger picture $\quad U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$

$t=+\infty$ における状態ケット

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty} U(t-t_0)|i\rangle$$

これを基底ブラ $\langle f|$ で展開したものが遷移振幅

($|f\rangle$ と上がどれくらい overlap しているか)

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty} \langle f|\underbrace{U(t-t_0)|i\rangle}_{\text{time evolveした状態ケット}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty} \langle 0|a(\mathbf{k}_f)\,U(t-t_0)\,a^\dagger(\mathbf{k}_i)|0\rangle$$

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} = \underbrace{e^{-i\frac{H}{\hbar}t}}_{U(t)}\;\underbrace{e^{+i\frac{H}{\hbar}t_0}}_{U^\dagger(t_0)}$$

真空は定常なので

$$= \lim_{t\to\infty}\lim_{t_0\to-\infty} \langle 0|\underbrace{U^\dagger(t)\,a(\mathbf{k}_f)\,U(t)}_{a(\mathbf{k}_f,\,t)}\;\underbrace{U^\dagger(t_0)\,a^\dagger(\mathbf{k}_i)\,U(t_0)}_{a^\dagger(\mathbf{k}_i,\,t_0)}|0\rangle$$

$$= \langle f|i\rangle_H$$

規格化

$\langle i|i\rangle = \langle f|f\rangle = 1$

①の結論

以上の定義より scattering amplitude は $\langle f|i\rangle$

② 次に initial / final state の漸近的自由場の生成消滅演算子について考える.

$$a_1^\dagger(+\infty) - a_1^\dagger(-\infty) = -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(-\partial^2+m^2)\varphi(x) \qquad (5.10)$$

∵) $a_1^\dagger(+\infty) - a_1^\dagger(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \partial_0 a_1^\dagger(t)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \partial_0 \int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\, a^\dagger(\mathbb{k})$ ∵) $a_1^\dagger(t)$ の定義 (5.6)

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, \partial_0\left(e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x)\right)$ ∵) $a^\dagger(\mathbb{k})$ の定義 (5.2)

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, \partial_0\left(e^{ikx}\partial_0\varphi(x) - \varphi(x)\partial_0 e^{ikx}\right)$

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(\partial_0^2+\omega^2)\varphi(x)$ ∵) $k^2 = \omega^2 - \mathbb{k}^2 = m^2$ $\omega := k^0$

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(\partial_0^2+\mathbb{k}^2+m^2)\varphi(x)$

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(\partial_0^2-\overleftarrow{\nabla}^2+m^2)\varphi(x)$ ※ $\overleftarrow{\nabla}^2$ は e^{ikx} にかかる

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(\partial_0^2-\vec{\nabla}^2+m^2)\varphi(x)$ ∵) partial integration.

$= -i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^4x\, e^{ikx}(-\partial^2+m^2)\varphi(x)$ // ※ $\partial^2 = -\partial_0^2+\nabla^2$ metric $(-,+,+,+)$

(5.10) について. free-field なら.

$(-\partial^2+m^2)\varphi(x) = 0$ (Klein-Gordon eq.)

より (5.10) の右辺は 0, よって.

$a_1^\dagger(+\infty) - a_1^\dagger(-\infty) = 0$ ⇐ free-field なら initial state と final state で creation operator が同じ.

一方 interacting theory では. 例えば 相互作用項として Lagrangian に

$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{6}g\varphi^3$

なる項を加えると. E-L eq. は.

$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$, $\mathcal{L} = \underbrace{-\partial^2\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\frac{1}{6}g\varphi^3}_{\mathcal{L}_{int}}$

②の結論その1

$\Rightarrow (-\partial^2+m^2)\varphi = \frac{1}{2}g\varphi^2 = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\varphi}$

より (5.10) の右辺が一般に非ゼロなので左辺も非ゼロ ⇐ 相互作用が入ると, initial state と final state で creation operator が一般には異なる.

補足: free-field の E-L eq. としての K-G eq.

action $S := \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}$

最小作用の原理は.

$\Rightarrow 0 = \delta S$

$= \int d^4x\, \delta\mathcal{L}$

$= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\partial_\mu\varphi\right\}$

$= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} + \underbrace{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right)}_{\text{surface term goes to 0 by b.c.}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right\}\delta\varphi$ ∵) $\delta\partial_\mu\varphi = \partial_\mu(\varphi+\delta\varphi) - \partial_\mu\varphi = \partial_\mu\delta\varphi$

$= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right\}\delta\varphi$

より. E-L eq.

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0$

を得る. これに free-field の Lagrangian を代入して.

$\mathcal{L} = -\partial^2\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = -g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$

$\Rightarrow \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi + m^2\varphi$

$= (-\partial^2+m^2)\varphi$

となり K-G eq. を得る (補足おわり)

(5.10) より creation operator の時間発展.

$$a_i^\dagger(-\infty) = a_i^\dagger(+\infty) + i\int d^3k\, f_i(\mathbb{k}) \int d^4x\, e^{ikx}(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) \qquad (5.11)$$

hermitian conjugate を取ると. anihilation operator の時間発展.

$$a_1(+\infty) = a_1(-\infty) + i\int d^3k\, f_1(\mathbb{k}) \int d^4x\, e^{-ikx}(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) \qquad (5.12)$$

②の結論 その②

③ scattering amplitude にもどって戻すと.

$t=-\infty$ で momentum space に局在した w.p. が interaction の末 なんやかんやあって $t=+\infty$ でも局在した w.p. になってる (再現したい描像)

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|a_{1'}(+\infty)\, a_{2'}(+\infty)\, a_1^\dagger(-\infty)\, a_2^\dagger(-\infty)|0\rangle \qquad (5.13)$$

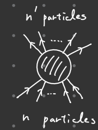
全ての operator が 時間 ㊅→㊆ の順に並んでいる ("time ordered")

$$= \langle 0|T\{a_{1'}(+\infty)\, a_{2'}(+\infty)\, a_1^\dagger(-\infty)\, a_2^\dagger(-\infty)\}|0\rangle$$

T積 : operator を time order に並べる

ここで wave packet が 運動量空間で δ関数的に分布するとする (wave packet でなく particle と考える)

$f_1(\mathbb{k}) = \delta^{(3)}(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)$ として 更に $n \to n'$ 粒子への散乱へ拡張する (LSZ reduction formula)



$$\Rightarrow \langle f|i\rangle = i^{n+n'}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n'}\int d^4x_i\, e^{ik_ix_i}(-\partial_i^2+m^2)\int d^4x'_j\, e^{-ik'_jx'_j}(-\partial_{j'}^2+m^2)\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x'_1)\cdots\varphi(x'_{n'})|0\rangle \qquad (5.15)$$

③の結論 (散乱振幅 (左辺) は相関関数を計算できればわかる)

$$\because)\ \langle f|i\rangle = \langle 0|T\{\prod_{j=1}^{n'}a_{j'}(+\infty)\prod_{i=1}^{n}a_i^\dagger(-\infty)\}|0\rangle$$

$$= \langle 0|T\{\prod_{j=1}^{n'}\Big(a_{j'}(-\infty) + i\int d^3k'\,\delta(\mathbb{k}'-\mathbb{k}'_j)\int d^4x'_j\, e^{-ik'x'_j}(-\partial_{j'}^2+m^2)\varphi(x'_j)\Big)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(a_i^\dagger(+\infty) + i\int d^3k\,\delta(\mathbb{k}-\mathbb{k}_i)\int d^4x_i\, e^{+ikx_i}(-\partial_i^2+m^2)\varphi(x_i)\Big)\}|0\rangle$$

T積の後 |0> に作用して 0

$$= i^{n+n'}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n'}\int d^4x_i\, e^{ik_ix_i}(-\partial_i^2+m^2)\int d^4x'_j\, e^{-ik'_jx'_j}(-\partial_{j'}^2+m^2)\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x'_1)\cdots\varphi(x'_{n'})|0\rangle \;//$$

④ この結果は 相互作用場は $t=\pm\infty$ では漸近的に自由場の1粒子状態の集まりと見做せるので自由場の生成消滅演算子を用いて書けるという仮定に基づく

⇒ この仮定の正当性を check したい

⇒ 相互作用があると仮定して, $t\to\pm\infty$ で 相互作用する場と見做さなくてよい ことを示す.

相互作用場についての我々の仮定

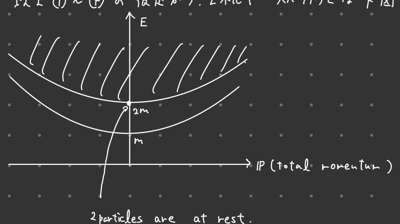
① unique な 基底状態 $|0\rangle$ (momentum & energy is 0) が存在.

② 第1励起状態は 一粒子状態 (mass が m, momentum $\mathbb{P}$ は任意 $m^2 = E^2 - \mathbb{P}^2$) ← $\mathbb{k}$-E 平面の双曲線

③ 第2励起状態は 束縛状態の二粒子状態だが, これは一旦ムシ

④ ③より 第2励起状態は free な 二粒子状態 (mass が m×2, それぞれの momentum は任意 ⇒ 連続スペクトル)

以上 ①~④ の仮定から, エネルギースペクトルは下図のようになる.



$\langle 0|\varphi(0)\varphi(0)|0\rangle$
真空グラフ.

まず scattering amplitude をどのように "normalize" するか.

① $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0$

場の演算子の Heisenberg 描像

$$\varphi(x) = e^{-iP_\mu x^\mu}\varphi(0)\, e^{+iP_\mu x^\mu}$$

これを真空で挟むと.

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{-iP\cdot x}\varphi(0)\, e^{+iP\cdot x}|0\rangle = \langle 0|(1+O(P_\mu))\varphi(0)(1+O(P_\mu))|0\rangle = \langle 0|\varphi(0)|0\rangle \qquad \because)\ P_\mu|0\rangle = 0$$

$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0$ とする (φは1粒子状態を作る)

もし、$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$ なら定数だけ場の演算子をshiftして解消してしまえばよい。

② $\langle p|\varphi(x)|0\rangle = 1$

4-momentum が p のような 1-particle state $|p\rangle$

$$\langle p|\varphi(x)|0\rangle = \langle p|e^{-iP\cdot x}\varphi(0)e^{+iP\cdot x}|0\rangle = e^{-ipx}\langle p|\varphi(0)|0\rangle$$

← c数なので Lorentz inv. $p^2=-m^2$ という定数でかける.

真空から momentum p の1粒子状態となって平面波として時間発展.

$\langle p|\varphi(0)|0\rangle = 1$ と normalize する. もし $\langle p|\varphi(0)|0\rangle \neq 1$ のときは 1になるように $\varphi(x)$ を rescale する.

③ $|0\rangle \to |p,n\rangle$ の amplitude について. $\langle p,n|\varphi(x)|0\rangle$

$|p,n\rangle$: total 4-momentum が p , n: その他(質量などの)ラベル の多粒子状態で、それらが相互作用していて free な1粒子状態の集まりに分解できない状態

$p^0 = (\mathbb{p}^2 + M^2)^{1/2}$ ← total mass, total 3-momentum

$\langle p,n|\varphi(x)|0\rangle = e^{-ipx}\langle p,n|\varphi(0)|0\rangle$ ← plane wave だから規格化されてない, よね?

$t=\pm\infty$ で自由場とみなしてよいためには $\langle p,n|a^\dagger(\pm\infty)|0\rangle = 0$ であればよい.

より詳しくみると、

$|\psi\rangle = \sum_n \int d^3p\, \psi_n(\mathbb{p})|p,n\rangle$ ← total momentum $\mathbb{p}$ の波束の集まり. 便宜上こう書いた $\sum_n$ は相対運動量などの連続量の積分も含む.

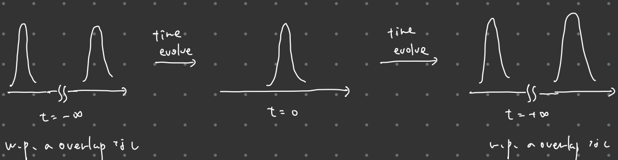
$$\begin{aligned}
\langle\psi|a_1^\dagger(t)|0\rangle &= -i\sum_n\int d^3p\,\psi_n^*(\mathbb{p})\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^3x\, e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial_0}\langle p,n|\varphi(x)|0\rangle \\
&= -i\sum_n\int d^3p\,\psi_n^*(\mathbb{p})\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^3x\,(e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial_0}e^{-ipx})A_n(\mathbb{p}) && \because (5.19) \\
&= \sum_n\int d^3p\,\psi_n^*(\mathbb{p})\int d^3k\, f_1(\mathbb{k})\int d^3x\,(p^0+k^0)e^{i(k-p)x}A_n(\mathbb{p}) \\
&= \sum_n\int d^3p\,(2\pi)^3(p^0+k^0)\psi_n^*(\mathbb{p})f_1(\mathbb{p})A_n(\mathbb{p})e^{i(p^0-k^0)t} && \because \int d^3x\, e^{i(\mathbb{k}-\mathbb{p})\cdot\mathbb{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbb{k}-\mathbb{p}) \\
&\to 0 \quad (t\to\pm\infty) && \because \text{Riemann-Lebesgue の定理}
\end{aligned}$$

$p^0 = (\mathbb{p}^2+M^2)^{1/2} > k^0 = (\mathbb{p}^2+m^2)^{1/2}$

$\psi_n(\mathbb{p},n)$ は normalizableのときにとる.

Riemann-Lebesgue を適用できるように.

これを図示すると下



④の結論

これは最初に考えていた自由場→自由場の描像なので 散乱過程は自由場→自由場とみなしてよい!

※注

④の①や②で考えた $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0$ や $\langle p|\varphi(x)|0\rangle = e^{-ip\cdot x}$ の normalization について.

例えば以下のような相互作用のあるスカラー場のラグランジアンを考える.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi + \frac{1}{6}g\varphi^3$$

上の normalization をすると (φの定数分のshiftと定数倍のrescaleがあるので.) Lagrangian はいくつかのパラメーターを rename して、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\varphi\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}Z_m m^2\varphi^2 + \frac{1}{6}Z_g g\varphi^3 + Y\varphi$$

Z_φ, Z_m, Z_g, Y : unknown constant ×4　　$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0$, $\langle p|\varphi(x)|0\rangle = e^{-ip\cdot x}$: two conditions.

条件として、更に
- m は実際の mass である (基底状態と1粒子静止状態のエネルギー差)
- g を何らかの条件をもとに fix. (散乱振幅の次元など)

を課すと、条件が4つとなり、unknown constant が全て求まって ちゃんと normalized Lagrangian が分かる.

補足 LSZ formula と crossing symmetry.

LSZ formula

$$\langle f | i \rangle = i^{n+n'} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n'} \int d^4x_i \, e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m^2) \int d^4x_j' \, e^{-ik_j' x_j'} (-\partial_{j'}^2 + m^2) \langle 0 | T\{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(x_1') \cdots \varphi(x'_{n'}) | 0 \rangle$$

ingoing particle　　outgoing particle

$$= i^{n+n'} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n'-1} \int d^4x_i \, e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m^2) \int d^4x_{n'}' \, e^{-ik_{n'}' x_{n'}'} (-\partial_{n'}^2 + m^2) \int d^4x_j' \, e^{-ik_j x_j} (-\partial_{j'}^2 + m^2) \langle 0 | T\{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(x_1') \cdots \varphi(x'_{n'}) | 0 \rangle$$

momentum $-k_{n'}'$ で "ingoing" する anti particle

反粒子は粒子をCP変換したものであることに注意して上のように変形すると

n粒子 → n'粒子 の ⟨f|i⟩ と、n粒子 + 1反粒子 → n'−1 粒子 の ⟨f|i⟩ が等しいと分かる。これが crossing symmetry.