

Section 46 Spin sums

目標: scattering amp. の計算の計算手法を導く。

$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ の amp.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= g^2 \bar{u}_s(p') \left[\frac{-\not{p} + \not{k} + m}{-s + m^2} + \frac{-\not{p} + \not{k}' + m}{-u + m^2} \right] u_s(p) \\ &= g^2 \bar{u}_s(p') \left[\frac{\not{k} + 2m}{-s + m^2} + \frac{\not{k}' + 2m}{-u + m^2} \right] u_s(p) \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Dirac eq. } \not{k} u_s(p) = m u_s(p) \text{ 等を用いて} \\ \hline \end{array} \right. \\ &= \bar{u}' A u \end{aligned}$$

したがって, $|\mathcal{T}|^2 = \mathcal{T}^* \mathcal{T}$ を計算する必要がある? どのように計算するか...

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^* &= \overline{\mathcal{T}} \quad \text{or} \quad \bar{A} = \beta A^\dagger \beta \\ &= \overline{\bar{u}' A u} \\ &= \bar{u} \bar{A} u' \end{aligned}$$

ここで, $\bar{A} = A$ となるように A を選ぶ。つまり, $\bar{A} = A$

$$\begin{aligned} \beta k^\dagger \beta &= k_\mu \beta (\gamma^\mu)^\dagger \beta \\ &= -k_\mu \beta \gamma^\mu \beta \quad (\text{since } (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu) \\ &= k_\mu \gamma^\mu = k \quad (\text{since } \{\gamma^\mu, \beta\} = 0) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}|^2 &= (\bar{u}' A u) (\bar{u} \bar{A} u') \\ &= \sum_{\alpha, \beta, r, s} \bar{u}'_\alpha A_{\alpha\beta} u_\beta \bar{u}_r A_{rs} u'_s \\ &= \sum_{\alpha, \beta, r, s} u'_s \bar{u}'_\alpha A_{\alpha\beta} u_\beta \bar{u}_r A_{rs} \\ &= \text{Tr} [(u' \bar{u}') A (u \bar{u}) A] \quad \text{--- (*) を用いて} \end{aligned}$$

したがって, Section 38 の結果を用いて計算する。

$$u_s(p) \bar{u}_s(p) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \not{\epsilon}) (-\not{p} + m)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}|^2 &= \frac{1}{4} \text{Tr} [(1 - s' \gamma_5 \not{\epsilon}') (-\not{p}' + m) A \\ &\quad \times (1 - s \gamma_5 \not{\epsilon}) (-\not{p} + m) A] \end{aligned}$$

計算する。

上を同様にして,

$$\int_S u_s(p) \bar{u}_s(p) = -\not{p} + m \quad \text{かつ} \quad \int_S v_s(p) \bar{v}_s(p) = -\not{p} - m$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \langle T_1 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{S_1, S_2, S'_1, S'_2} |T|^2 \\ &= \frac{g^4}{4} \left[\frac{1}{(M^2 - t)^2} \text{Tr} [(-\not{p}_1 + m)(-\not{p}'_1 + m)] \text{Tr} [(-\not{p}_2 - m)(-\not{p}'_2 - m)] \right. \\ &\quad + \frac{1}{(M^2 - s)^2} \text{Tr} [(-\not{p}_1 + m)(-\not{p}_2 - m)] \text{Tr} [(-\not{p}'_1 - m)(-\not{p}'_2 + m)] \\ &\quad - \frac{1}{(M^2 - t)(M^2 - s)} \text{Tr} [(-\not{p}_1 + m)(-\not{p}'_2 - m)(-\not{p}'_1 - m)(-\not{p}_2 + m)] \\ &\quad \left. - \frac{1}{(M^2 - t)(M^2 - s)} \text{Tr} [(-\not{p}_1 + m)(-\not{p}'_1 + m)(-\not{p}'_2 - m)(-\not{p}_2 - m)] \right] \end{aligned}$$

を得る。この式を今までの変数に置き換える。