

45 The Feynman rules for Dirac fields

目標: 場の理論でツリーレベルのダイアグラム, 散乱振幅を計算する.

I. 設定

ψ : Dirac field (mass m)

φ : scalar "

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}M\varphi^2 + \underbrace{g\varphi\bar{\psi}\psi}_{=\mathcal{L}_1}$$

Rem.

4-dim. では $[\varphi] = 1, [\psi] = 3/2 \rightarrow [g] = 0$.
 エネルギーの散乱振幅が g に nontrivial に依存 c.f. §12

Rem.

$\mathcal{L}_1$ は $U(1): \psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$ で invar. 7717 int. $\mathcal{L}$ 経て charge conserv.
 特に本節では Q は electric charge, b-type $\equiv e^-$, d-type $\equiv e^+$, scalar $\mathcal{L}$ 中性とす.
 c.f. scalar は Higgs とする. (§8ff)

II. ダイアグラムの翻訳ルール

i. ノーソース

対象

$$Z(\bar{\eta}, \eta, J) \propto \exp \left[i g \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] Z_0(\bar{\eta}, \eta, J)$$

$$\left(\begin{aligned} Z_0(\bar{\eta}, \eta, J) &= \exp \left[i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y) \right] \\ S(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-\not{p} + m) e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad \Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + M^2 - i\epsilon} \\ Z(0, 0, 0) &= 1 \end{aligned} \right)$$

$$Z(\bar{\eta}, \eta, J) = \exp \left[i W(\bar{\eta}, \eta, J) \right]$$

connected diagrams with sources

構成

$$\begin{aligned} \text{fermion line} & \quad \frac{1}{i} S(x-y) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-\not{p} + m) e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \\ \text{scalar line} & \quad \frac{1}{i} \Delta(x-y) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + M^2 - i\epsilon} \\ \text{fermion loop} & \quad i g \int d^4x \\ \text{scalar loop} & \quad i \int d^4x J(x) \\ \text{fermion source} & \quad i \int d^4x \eta(x) \\ \text{scalar source} & \quad i \int d^4x \bar{\eta}(x) \end{aligned}$$

Rem.

tadpole は除いておく.

ψ の tadpole は δq と同じく $\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle$ に打ち消す $\psi \in \mathcal{L}$ に入るものは "un".

ψ は $\bar{\psi}$ とセットで出てくるので tadpole も $\bar{\psi}$ と打ち消す.

Rem.

スコープの脚とジョイント - 5 - はダイアグラムの順序を踏かずに全て潰す.

cf. F.13

e.g.

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= 2 \text{ Diagram 2} \\ &= i \int d^4 x \bar{\eta}(x) \int d^4 w J(w) i \int d^4 z i g \int d^4 y \frac{1}{i} \underbrace{S(x-y)} \frac{1}{i} \underbrace{S(y-z)} \frac{1}{i} \underbrace{\Delta(y-w)} \eta(z) \end{aligned}$$

スコープの順序を y に潰す

ii. ソース消去 (位置表示)

対象

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(y_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_N}(x_N) \bar{\psi}_{\beta_N}(y_N) \psi(z_1) \dots | 0 \rangle_c \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x_1)} i \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(z_1)} \dots i W(\bar{\eta}, \eta, J) \Big|_{\bar{\eta}=\eta=J=0} \end{aligned}$$

構成

i. Σ は汎関数微分による.

項の重複があるとき, 符号は

$$\begin{aligned} y_1 &\longrightarrow x_{\sigma(1)} \\ &\vdots \\ y_N &\longrightarrow x_{\sigma(N)} \end{aligned} \Rightarrow \text{sgn } \sigma$$

e.g.

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T \bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \psi(z_1) \psi(z_2) | 0 \rangle_c \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} i \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(y)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z_2)} \text{Diagram} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} \\ &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\ &= i g \int d^4 w_1 i g \int d^4 w_2 [S(x-w_1) S(w_1-w_2) S(w_2-y) I_{\alpha\beta} \Delta(z_1-w_1) \Delta(z_2-w_2) + (z_1 \leftrightarrow z_2)] \end{aligned}$$

e.g.

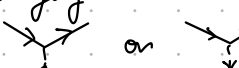
$$\begin{aligned} &\langle 0 | T \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(y_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \bar{\psi}_{\beta_2}(y_2) | 0 \rangle_c \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x_1)} i \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(y_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_2}(x_2)} i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_2}(y_2)} \frac{\text{Diagram}}{2} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x_1)} i \frac{\delta}{\delta \eta_\beta(y_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_2}(x_2)} i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_2}(y_2)} \\ &\quad \times \frac{1}{2} i^4 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 (i g)^2 \int d^4 w_1 d^4 w_2 \left(\frac{1}{i} \right)^5 \\ &\quad \times \bar{\eta}(x_1) S(x_1-w_1) S(w_1-y_1) \eta(y_1) \bar{\eta}(x_2) S(x_2-w_2) S(w_2-y_2) \eta(y_2) \Delta(w_1-w_2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} \right)^5 (i g)^2 \int d^4 w_1 d^4 w_2 [S(x_1-w_1) S(w_1-y_1) I_{\alpha\beta}] [S(x_2-w_2) S(w_2-y_2) I_{\alpha_2\beta_2}] \Delta(w_1-w_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (x_1 \leftrightarrow x_2) - (y_1 \leftrightarrow y_2) + (x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2) \\
& = \left(\frac{1}{i}\right)^5 (ig)^2 \int d^4w_1 d^4w_2 [S(x_1 - w_1) S(w_1 - y_1)]_{\alpha_1 \beta_1} [S(x_2 - w_2) S(w_2 - y_2)]_{\alpha_2 \beta_2} \Delta(w_1 - w_2) \\
& - (y_1, \beta_1 \leftrightarrow y_2, \beta_2)
\end{aligned}$$

iii. γ -2消去 (運動量表示)

対象 $i\gamma, \langle f|i \rangle = \langle 0|T a(k)_{out} b_{s_1}(p_1)_{out} d_{s_2}(p_2)_{out} \dots d_{s_N}(p_N)_{in} b_{s_N}^\dagger(p_N)_{in} a^\dagger(k)_{in} \dots |0 \rangle$

構成

1. incoming e^- には incoming 矢印 正対して momentum を併記
2. outgoing e^- outgoing 矢印 正対して momentum
3. incoming e^+ outgoing 矢印 正対して - momentum
4. outgoing e^+ incoming 矢印 正対して - momentum
5. incoming scalar incoming 破線矢印 momentum
6. outgoing scalar outgoing 破線矢印 momentum
7.  vertex には, トポロジカルに異なる可能なダイアグラムを全て描く.

vertex で momentum を保存するようには内線の momentum を決定.
ダイアグラム各部分には

- incoming / outgoing scalar : 1
- incoming e^- : $u_{s_i}(p_i)$
- outgoing e^- : $\bar{u}_{s_i}(p_i)$
- incoming e^+ : $\bar{v}_{s_i}(p_i)$
- outgoing e^+ : $v_{s_i}(p_i)$
- vertex : ig
- internal scalar : $-i/(k^2 + M^2 - i\epsilon)$
- internal fermion : $-i(-\not{p} + m)/(p^2 + m^2 - i\epsilon)$

と組み合わせでダイアグラムの値を決定.

10. スカラーの質量は ii. に従って決まる.
(fermion line の矢印に逆行して上記 $u, v, \bar{u}, \bar{v}$, propg. を並べれば良い.)

11. ダイアグラムの符号は ii. に従って決定する.

$$\begin{pmatrix} p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_{s(1)} \\ \vdots \\ p_n \rightarrow \dots \rightarrow p_{s(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sgn} \sigma$$

12. 総和をとって γ -レベルの $i\gamma$

e.g. $\langle f|i \rangle = \langle 0|T a(k)_{out} b_{s'}(p')_{out} b_s^\dagger(p)_{in} a^\dagger(k)_{in} |0 \rangle$ には

$$b_s^\dagger(p)_{in} \rightarrow i \int d^4y \bar{\Psi}(y) (+i\not{\partial} + m) u_s(p) e^{+ip \cdot y} \quad \therefore (4.18)$$

$$b_{s'}(p')_{out} \rightarrow i \int d^4x e^{-ip' \cdot x} \bar{u}_{s'}(p') (-i\not{\partial} + m) \Psi(x) \quad \therefore (4.19)$$

$$a^\dagger(k)_{in} \rightarrow i \int d^4z_1 e^{+ik \cdot z_1} (-\partial^2 + M^2) \varphi(z_1) \quad \therefore (5.11) \quad \text{cf. } (4.18) \text{ is derived from } (4.10)$$

$$a(k)_{out} \rightarrow i \int d^4z_2 e^{-ik \cdot z_2} (-\partial^2 + M^2) \varphi(z_2) \quad \therefore (5.12)$$

と置きかえて

