§42 The Free Fermion Propagator

目標：Fermionについて Propagatorを考え、真空期待値をPropagatorによって表す。

自由Dirac場を考える

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm}\int \widetilde{dp}\left[b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}\right]$$

$$\overline{\Psi}(x) = \sum_{s'=\pm}\int \widetilde{dp'}\left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')e^{-ip'x} + d_{s'}(\mathbf{p}')\overline{v}_{s'}(\mathbf{p}')e^{ip'x}\right]$$

(42.1)(42.2)

ただし

$$b_s(\mathbf{p})|0\rangle = d_s(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \qquad (42.3)$$

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')2\omega\delta_{ss'} \quad (42.4)$$
$$\{d_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')2\omega\delta_{ss'} \quad (42.5)$$
$$\{\text{他の組合わせ}\} = 0$$

次で定義される Feynman propagator を考える.

$$S(x-y)_{\alpha\beta} \equiv i\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)|0\rangle \qquad (42.6)$$

(※ $T\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y) = \theta(x^0-y^0)\Psi_\alpha\overline{\Psi}_\beta - \theta(y^0-x^0)\overline{\Psi}_\beta\Psi_\alpha$ (42.7)

($\because \Psi_\alpha\overline{\Psi}_\beta = -\overline{\Psi}_\beta\Psi_\alpha$))

((8.15)によりpropagatorを定義した形)

ここで

$$\langle 0|\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)|0\rangle$$

$$= \sum_{s,s'}\int \widetilde{dp}\,\widetilde{dp'}\,e^{ipx}e^{-ip'y}u_s(\mathbf{p})_\alpha\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')_\beta\langle 0|b_s(\mathbf{p})b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle$$

($\because$ (42.1),(42.2)より出る項で、$b_sb_{s'}^\dagger$以外の項は、(42.3)により全て0になる)

$$= \sum_{s,s'}\int \widetilde{dp}\,\widetilde{dp'}\,e^{ipx}e^{-ip'y}u_s(\mathbf{p})_\alpha\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')_\beta(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')2\omega\delta_{ss'}$$

($\because \langle 0|b_sb_{s'}^\dagger|0\rangle = \langle 0|b_sb_{s'}^\dagger + b_{s'}^\dagger b_s|0\rangle$ ($\because$ (42.3))
$= (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')2\omega\delta_{ss'}$ ($\because$ (42.4)))

$$= \sum_s\int \widetilde{dp}\,e^{ip(x-y)}u_s(\mathbf{p})_\alpha\overline{u}_s(\mathbf{p})_\beta$$

($\because$ (37.31) $\widetilde{dp} \ni \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega}$ より係数が消える)

$$= \int \widetilde{dp}\, e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \qquad (42.8)$$

$$\left(\because (38.23) \sum_{s=\pm} u_s \bar{u}_s = -\not{p} + m \right)$$

同様にして

$$\langle 0 | \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x) | 0 \rangle$$

$$= \int \widetilde{dp}\, e^{-ip(x-y)} (-\not{p} - m)_{\alpha\beta} \qquad (42.9)$$

$\Rightarrow S(x-y)_{\alpha\beta}$ が計算できる

section 8 において、(8.11) から (8.13) を導いたように、p^0 積分を考えて留数定理を用いることにより、

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)} f(p)}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} = i\theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{dp}\, e^{ip(x-y)} f(p)$$
$$+ i\theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{dp}\, e^{-ip(x-y)} f(-p) \qquad (42.10)$$

($f(p)$ は p の多項式関数)

を得る.

(42.10) を用いると、

$$\langle 0 | T \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{dp}\, e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$
$$- \theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{dp}\, e^{-ip(x-y)} (-\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{dp}\, e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$
$$+ \theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{dp}\, e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

($\because$ 2項目において $p \to -p$ とした)

$$= \frac{1}{i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \qquad (42.11)$$

$$\therefore S(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \qquad (42.12)$$

ここで $S(x-y)_{\alpha\beta}$ は Dirac 方程式 の Green 関数になっていることを確かめる。

$$(-i\not\partial_x+m)_{\alpha\beta}S(x-y)_{\beta\gamma}$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}\frac{(\not p+m)_{\alpha\beta}(-\not p+m)_{\beta\gamma}}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$
$$\left(\because\ -i\not\partial_x e^{ip(x-y)}=-i(i\not p)e^{ip(x-y)}=\not p e^{ip(x-y)}\right)$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}\frac{(p^2+m^2)\delta_{\alpha\gamma}}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$
$$\left(\because\ (37.26)\ \not a\not a=-a^2\right)$$
$$=\delta^4(x-y)\delta_{\alpha\gamma} \qquad (42.13)$$
(∵ $\varepsilon\to 0$で 被積分関数が $e^{ip(x-y)}$ に)

同様に、
$$S(x-y)_{\alpha\beta}(+i\overleftarrow{\not\partial}_y+m)_{\beta\gamma}$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}\frac{(-\not p+m)_{\alpha\beta}(\not p+m)_{\beta\gamma}}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$
$$=\delta^4(x-y)\delta_{\alpha\gamma} \qquad (42.14)$$

$\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle$, $\langle 0|T\overline{\Psi}_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)|0\rangle$ も同様に計算できるが、bと$b^\dagger$, dと$d^\dagger$ の組み合わせが存在しないため、(42.8)導出と同様にすれば、共に0になる。

次にマヨラナ場について考える。
$$\Psi(x)=\sum_{s=\pm}\int\widetilde{dp}\left[b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx}+b_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}\right] \quad (42.17)$$
$$\overline{\Psi}(y)=\sum_{s'=\pm}\int\widetilde{dp'}\left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')e^{-ip'y}+b_{s'}(\mathbf{p}')\overline{v}_{s'}(\mathbf{p}')e^{ip'y}\right] \quad (42.18)$$

$\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)|0\rangle$ の計算は Dirac場での計算で dをbに変えるだけなので、結果は変わらない。

$$i\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)|0\rangle=S(x-y)_{\alpha\beta} \qquad (42.19)$$

しかし、Majorana場では、$T\Psi_\alpha\Psi_\beta$、$T\overline{\Psi}_\alpha\overline{\Psi}_\beta$ はノンゼロになる。(Dirac場では0)

Majorana 条件 $\bar\Psi = \Psi^T C$ を書き換えて $\Psi^T = \bar\Psi C^{-1}$ とすると、

$$i\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle$$

$$\left(= i\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\Psi^T_\beta(y)|0\rangle\right)$$

$$= i\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\gamma(y)|0\rangle(C^{-1})_{\gamma\beta}$$

$$= [S(x-y)C^{-1}]_{\alpha\beta} \qquad (42.20)$$

同様に $C^T = C^{-1}$ として書き直した Majorana 条件 $\bar\Psi^T = C^{-1}\Psi$ を用いれば、

$$i\langle 0|T\bar\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\beta(y)|0\rangle$$

$$= [C^{-1}S(x-y)]_{\alpha\beta} \qquad (42.21)$$

(※ $C^{-1} = -C$ なので (42.20), (42.21) はより使いやすく書ける)

より多くの場についての真空期待値もとれる。

◦ Dirac場の場合。

期待値がノンゼロの結果となるのは Ψ と $\bar\Psi$ の数が同数の時。奇数回入れ替えで − がつく

例)
$$i^2\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\beta(y)\Psi_\gamma(z)\bar\Psi_\delta(w)|0\rangle$$
$$= S(x-y)_{\alpha\beta}S(z-w)_{\gamma\delta}$$
$$- S(x-w)_{\alpha\delta}S(z-y)_{\gamma\beta} \qquad (42.22)$$

$$(\because\ \Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\beta(y)\Psi_\gamma(z)\bar\Psi_\delta(w) = (-1)^3\,\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\delta(w)\Psi_\gamma(z)\bar\Psi_\beta(y))$$

◦ Majorana場の場合

Ψ, $\bar\Psi$ の数によらずノンゼロ。− がつくのは Dirac と同じ時。

例) $i^2\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(y)\Psi_\gamma(z)\Psi_\delta(w)|0\rangle$

$$= +[S(x-y)C^{-1}]_{\alpha\beta}[S(z-w)C^{-1}]_{\gamma\delta}$$

$$-[S(x-z)C^{-1}]_{\alpha\gamma}[S(y-w)C^{-1}]_{\beta\delta}$$

$$+[S(x-w)C^{-1}]_{\alpha\delta}[S(y-z)C^{-1}]_{\beta\gamma} \qquad (42.23)$$

(※ 組み合わせの順序は次式より考えなくてよい

$$[S(x-y)C^{-1}]_{\alpha\beta} = -[S(y-x)C^{-1}]_{\beta\alpha} \qquad (42.24)$$

)