40. Parity, Time Reversal, and Charge Conjugation

目標：fermion場の P, T 及び C 変換性を見る.

前節までは

$$\begin{cases} U(\Lambda)\Psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ D(1+\delta\omega) = I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \\ S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{cases}$$

のように生成子を定義できる連続的な Lorent 変換 $SO^+(1,3)$ を見てきたが, 今回は離散的な変換を見る.

Parity

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{\in O(1,3)} \quad : \text{Parity変換行列}$$

場の変換のユニタリ行列を

$$P \equiv U(\mathcal{P})$$

として

$$P^{-1}\Psi(x)P = D(\mathcal{P})\Psi(\mathcal{P}x)$$

と変換.

・ $D(\mathcal{P})$ に課す条件

スカラー場 $\phi(x)$ では,

$$P^{-2}\phi(x)P(x) = D(\mathcal{P})^2\phi(\mathcal{P}x)$$

について, $\phi(x)^\dagger = \phi(x)$ (observable) より

$$P^{-2}\phi(x)P^2 = \phi(x)$$

$$\therefore \quad D(P)^2 = 1$$

であったが, fermion では

$$P^{-2}\Psi(x)P^2 = D(P)^2\Psi(Px)$$

について $\Psi^\dagger(x) \neq \Psi(x)$ (observable でない) より

$$D(P)^2 = \pm 1$$

に取れる.

正確には

$$D(P)^2 = e^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

であり, 上述では特別に $\theta = 0, \pi$ としている.
このことを示す.
まず

$$\left(\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\right)^\dagger = \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \qquad (\text{observable})$$

より

$$P^{-2}\bar{\Psi}(x)\Psi(x)P^2 = \bar{\Psi}(x)\Psi(x)$$

だが, $P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0$ ($\Leftrightarrow [P, \gamma^0] = 0$) を仮定すると,

$$P^{-2}\bar{\Psi}(x)\Psi(x)P^2 = \underbrace{\left(P^{-2}\bar{\Psi}(x)P^2\right)}_{\substack{\parallel \\ P^{-2}\Psi^\dagger(x)P^2\gamma^0 \\ \parallel \\ (P^{-2}\Psi(x)P^2)^\dagger\gamma^0}}\left(P^{-2}\Psi(x)P^2\right)$$

$$= \Psi^\dagger(Px)D^\dagger(P)^2\gamma^0 D(P)^2\Psi(Px)$$

なので、

$$D^\dagger(\mathcal{P})^2\gamma^0 D(\mathcal{P})^2 = \gamma^0$$

これが成立するには

$$D(\mathcal{P})^2 = e^{i\theta}$$

(Pauliの基本定理(本筋から外れるので詳述しない)より
$D^\dagger(\mathcal{P})^2\gamma^0 D(\mathcal{P})^2=\gamma^0 \Rightarrow D(\mathcal{P})^2 \propto \gamma^0$ or I
が言え、$D(\mathcal{P})$ の存在より $D(\mathcal{P})^2 \propto I$ となる。
つまり $D(\mathcal{P})^2 = e^{i\theta}\underbrace{M}_{\text{行列}}$ のようなことはない。)

○ $D(\mathcal{P})$ の表式

$D(\mathcal{P})$ の表式を導出するため、以下を要請。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{-1}\mathbb{P}\mathcal{P} = -\mathbb{P} & \mathbb{P}:\text{全運動量} \\ \mathcal{P}^{-1}\mathbb{J}\mathcal{P} = +\mathbb{J} & \mathbb{J}:\text{全角運動量} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{-1}b_s^\dagger(\mathbb{P})\mathcal{P} = \eta\, b_s^\dagger(-\mathbb{P}) \\ \mathcal{P}^{-1}d_s^\dagger(\mathbb{P})\mathcal{P} = \eta\, d_s^\dagger(-\mathbb{P}) \end{cases}$$

($\mathbb{P} \to -\mathbb{P}$, $s \to s$ ははじめ2つの要請に適う。)

ただしここで、$D(\mathcal{P})^2 = \pm 1$ より $\eta^2 = \pm 1$ である。
また、Majorana条件 $d_s(\mathbb{P}) = b_s(\mathbb{P})$ も課すことができるように、$b_s^\dagger(\mathbb{P})$ と $d_s^\dagger(\mathbb{P})$ で η は共通とした(要請)。

さて

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm} \int d\hat{p} \left[b_s(\mathbb{p}) u_s(\mathbb{p}) e^{ipx} + d_s^\dagger(\mathbb{p}) v_s(\mathbb{p}) e^{-ipx} \right]$$

をParity変換する。

$$\underline{P}^{-1} e^{\pm ipx} \underline{P} = e^{\pm i(\mathcal{P}p)(\mathcal{P}x)} = e^{\pm ipx}$$

及び

$$\begin{cases} \underline{P}^{-1} u_s(\mathbb{p}) \underline{P} = u_s(\mathbb{p}) \\ \underline{P}^{-1} v_s(\mathbb{p}) \underline{P} = v_s(\mathbb{p}) \end{cases}$$

∵ $\begin{cases} u_s(\mathbb{p}) = \exp(i\eta \hat{\mathbb{p}} \cdot \mathbb{K}) u_s(\mathbb{0}) \\ v_s(\mathbb{p}) = \exp(i\eta \hat{\mathbb{p}} \cdot \mathbb{K}) v_s(\mathbb{0}) \end{cases}$

であり、(38.6) より自明に

$$\begin{cases} \underline{P}^{-1} u_s(\mathbb{0}) \underline{P} = u_s(\mathbb{0}) \\ \underline{P}^{-1} v_s(\mathbb{0}) \underline{P} = v_s(\mathbb{0}) \end{cases}$$

後にわかる
$D(\mathcal{P})^{-1} \gamma^i D(\mathcal{P}) = -\gamma^i$
と混同しないよう注意。

また、

$$\underline{P}^{-1} \gamma^i \underline{P} = +\gamma^i$$

を課して、

$$\underline{P}^{-1} K^i \underline{P} = \underline{P}^{-1} \left(\frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^0] \right) \underline{P} = +K^i$$

なので

$$\underline{P}^{-1} \exp(i\eta \hat{\mathbb{p}} \cdot \mathbb{K}) \underline{P} = \exp\left(i\eta (+\hat{\mathbb{p}}) \cdot (+\mathbb{K}) \right)$$

$$= \exp(i\eta \hat{\mathbb{p}} \cdot \mathbb{K})$$

以上から上述は示される。

なので、

$$\mathcal{P}^{-1}\Psi(x)\mathcal{P}=\sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\Big[\left(\mathcal{P}^{-1}b_s(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)\left(\mathcal{P}^{-1}u_s(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)\left(\mathcal{P}^{-1}e^{ipx}\mathcal{P}\right)$$
$$+\left(\mathcal{P}^{-1}d_s^{\dagger}(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)\left(\mathcal{P}^{-1}v_s(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)\left(\mathcal{P}^{-1}e^{-ipx}\mathcal{P}\right)\Big]$$

$$=\sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\left(\mathcal{P}^{-1}b_s(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)u_s(\mathbb{p})e^{ipx}+\left(\mathcal{P}^{-1}d_s^{\dagger}(\mathbb{p})\mathcal{P}\right)v_s(\mathbb{p})e^{-ipx}\right]$$

$$=\sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\eta^* b_s(-\mathbb{p})u_s(\mathbb{p})e^{ipx}+\eta d_s^{\dagger}(-\mathbb{p})v_s(-\mathbb{p})e^{-ipx}\right]$$

$\big\downarrow\ \mathbb{p}\to-\mathbb{p}$

$$=\sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\eta^* b_s(\mathbb{p})u_s(-\mathbb{p})e^{ip\mathcal{P}x}+\eta d_s^{\dagger}(\mathbb{p})v_s(-\mathbb{p})e^{-ip\mathcal{P}x}\right]$$

ここに section 38 の (38.32)

$$\begin{cases} u_s(-\mathbb{p})=+\beta u_s(\mathbb{p}) \\ v_s(-\mathbb{p})=-\beta v_s(\mathbb{p}) \end{cases}\qquad \left(\beta=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\right)$$

を用い、$\eta=-i$ に選ぶと

$$\mathcal{P}^{-1}\Psi(x)\mathcal{P}=\sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[i b_s(\mathbb{p})\beta u_s(\mathbb{p})e^{ip\mathcal{P}x}+i d_s^{\dagger}(\mathbb{p})\beta v_s(\mathbb{p})e^{-ip\mathcal{P}x}\right]$$

$$=i\beta\Psi(\mathcal{P}x)$$

つまり $D(\mathcal{P})=i\beta$

◦ 内部 Parity

e^-, e^+ の重心系のような状態を考えよう：

$$|\phi\rangle=\int d\tilde{p}\,\phi(\mathbb{p})\,b_s^{\dagger}(\mathbb{p})\,d_{s'}^{\dagger}(-\mathbb{p})|0\rangle$$

ここで $\phi(\mathbb{p})$ は運動量空間の波動関数.

$|\phi\rangle$ が ある運動量 $\mathbb{p}$ を持つ状態 $b_s^{\dagger}(\mathbb{p})d_s^{\dagger}(-\mathbb{p})|0\rangle$ の重ね合わせであることを考えると、その重み $\phi(\mathbb{p})$ は波動関数であるべきだ.

続いて，以下を仮定：

$$\begin{cases} P\,|0\rangle = P^{-1}|0\rangle = |0\rangle \\ \phi(-\mathbb{P}) = (-)^{l}\phi(\mathbb{P}) \quad (l\text{は軌道角運動量の量子数}) \end{cases}$$

cf. 球面調和関数の Parity

$\mathbb{P} \to -\mathbb{P}$ は $(r, \theta, \varphi) \to (r, \theta+\pi, \varphi+\pi)$

なので，重心系の波動関数の Parity 変換性を見るに球面調和関数を考えるだけで十分．

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

だが，

$$P_l^m(\cos(\theta+\pi)) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}(-1)^{|m|}\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}P_l(\cos(\theta+\pi))$$

$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}(-1)^{|m|}\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}\frac{1}{2^l l!}(-1)^l\frac{d^l}{d(\cos\theta)^l}(\cos^2\theta-1)^l$$

$$= (-1)^l\cdot(-1)^{|m|}P_l^m(\cos\theta)$$

$$e^{im(\varphi+\pi)} = e^{im\pi}e^{im\varphi}$$

より

$$Y_l^m(\theta+\pi,\varphi+\pi) = (-1)^l\cdot\underbrace{(-1)^{|m|}e^{im\varphi}}_{=1}\,Y(\theta,\varphi)$$

$$= (-1)^l\,Y(\theta,\varphi)$$

$$\therefore \phi(-\mathbb{P}) = (-1)^l\phi(\mathbb{P})$$

すると，

$$P^{-1}|\phi\rangle = \int d\tilde{P}\,\phi(\mathbb{P})\left(P^{-1}b_s^{\dagger}(\mathbb{P})P\right)\left(P^{-1}d_s^{\dagger}(-\mathbb{P})P\right)P^{-1}|0\rangle$$

$$= (-i)^2 \int d\hat{p}\, \phi(\mathbb{P})\, b_s^\dagger(-\mathbb{P})\, d_{s'}^\dagger(\mathbb{P})\, |0\rangle$$

$\downarrow \mathbb{P} \to -\mathbb{P}$

$$= (-i)^2 \int d\hat{p}\, \phi(-\mathbb{P})\, b_s^\dagger(\mathbb{P})\, d_{s'}^\dagger(-\mathbb{P})\, |0\rangle$$

$$= -(-)^{\ell} |\phi\rangle$$

=> $e^- - e^+$ 対は内部Parity -1 を持つ.

この議論は Majorana fermion ($b^\dagger = d^\dagger$) にも同様.

cf <u>$\eta \neq -i$ のときの内部Parity</u>

例えば $\eta = 1$ に選ぶとき,

(40.10) より

$$\begin{cases} \underline{P}^{-1} b_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = b_s^\dagger(\mathbb{P}) \\ \underline{P}^{-1} d_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = d_s^\dagger(\mathbb{P}) \end{cases} \cdots (*)$$

なので

$$\underline{P}^{-1} |\phi\rangle = (-)^{\ell} |\phi\rangle$$

と内部Parityが $+1$ になってしまうが, 次のようにすることでこの問題を回避できる.

交換性 (40.10) を

$$\begin{cases} \underline{P}^{-1} b_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = \eta\, b_s^\dagger(\mathbb{P}) \\ \underline{P}^{-1} d_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = -\eta^*\, d_s^\dagger(\mathbb{P}) \end{cases}$$

に変更すると (*) は

$$\begin{cases} \underline{P}^{-1} b_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = b_s^\dagger(\mathbb{P}) \\ \underline{P}^{-1} d_s^\dagger(\mathbb{P}) \underline{P} = -d_s^\dagger(\mathbb{P}) \end{cases}$$

となり

$$P^{-1}|\phi\rangle = -(-)^{\ell}|\phi\rangle$$

となってくれる.

一方 $\eta = \pm i$ では

$$\begin{cases} P^{-1} b_s^{\dagger}(\mathbb{P}) P = \pm i b_s^{\dagger}(\mathbb{P}) \\ P^{-1} d_s^{\dagger}(\mathbb{P}) P = \pm i d_s^{\dagger}(\mathbb{P}) \end{cases}$$

と (40, 10) と同じになるので, これまでの議論は
この変更の下 破綻しない.

内部 Parity を知ることは粒子の反応を考えるに有用である.
というのは Hamiltonian が 正 Parity な理論では
反応前後で内部 Parity が保存するためである:

$$P^{-1} e^{iHt}|\phi\rangle \overset{\wedge}{=} e^{iHt} P^{-1}|\phi\rangle$$

$$\left(P^{-1} H P = H \Rightarrow [P^{-1}, e^{iHt}] = 0 \quad \text{を用いた.} \right)$$

◦ Weyl 場の変換性

$$P^{-1} \Psi_{\text{Dirac}}(x) P = i\beta \Psi_{\text{Dirac}}(\mathcal{P}x)$$ は

$$\Psi_{\text{Dirac}}(x) = \begin{pmatrix} \chi_a(x) \\ \xi^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{cases} P^{-1} \chi_a(x) P = i \xi^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x) \\ P^{-1} \xi^{\dagger\dot{a}}(x) P = i \chi_a(\mathcal{P}x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Parity 変換で left-handed と right-handed が入れ替わる.

また

$$\begin{cases} P^{-1}\chi_c(x)P = i\xi^{\dagger\dot{c}}(\mathcal{P}x) \\ P^{-1}\xi^{\dagger\dot{c}}(x)P = i\chi_c(\mathcal{P}x) \end{cases} \overset{h.c.}{\Longrightarrow} \begin{cases} P^{-1}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(x)P = -i\xi^c(\mathcal{P}x) \\ P^{-1}\xi^c(x)P = -i\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(\mathcal{P}x) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \times\epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \\ \Longrightarrow \\ \times\epsilon_{ac} \end{matrix} \begin{cases} P^{-1}\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(x)P = -i\underline{\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\xi^c(\mathcal{P}x)} = i\epsilon_{ac}\xi^c(\mathcal{P}x) \\ P^{-1}\epsilon_{ac}\xi^c(x)P = -i\underline{\epsilon_{ac}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(\mathcal{P}x)} = i\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(\mathcal{P}x) \end{cases}$$

この書き方少しまずいかな

$$\Longrightarrow \begin{cases} P^{-1}\chi^{\dagger\dot{a}}(x)P = i\xi_c(\mathcal{P}x) \\ P^{-1}\xi_a(x)P = i\chi^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x) \end{cases}$$

である. これは Majorana 条件 $\chi_a(x) = \xi_a(x)$ に整合.

▨ Time-reversal

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$: time-reversal 変換行列

場の変換のユニタリ行列を

$$T \equiv U(\mathcal{T})$$

として

$$T^{-1}\Psi(x)T = D(\mathcal{T})\Psi(\mathcal{T}x)$$

と変換.

また, Parity のときと同様に

$$D(\mathcal{T})^2 = \pm 1$$

○ D(𝒯)の表式

D(𝒯)の表式を導出するため以下を要請.

$$\begin{cases} T^{-1}\mathbb{P}T = -\mathbb{P} \\ T^{-1}\mathbb{J}T = -\mathbb{J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T^{-1}b_s^{\dagger}(\mathbb{P})T = \zeta_s b_{-s}^{\dagger}(-\mathbb{P}) \\ T^{-1}d_s^{\dagger}(\mathbb{P})T = \zeta_s d_{-s}^{\dagger}(-\mathbb{P}) \end{cases}$$

($T^{-1}\mathbb{J}T = -\mathbb{J}$ より, スピンも反転)

$$\{ T^{-1}iT = -i$$ (Tの反ユニタリ性)

(ここから $Ti|\psi\rangle = -iT|\psi\rangle$ より 確かにTは反ユニタリ)

これらを用いて Parityのときと同様, $\Psi(x)$ を Time-reversal 変換するが,

$$T^{-1}e^{\pm ipx}T = e^{\mp i(\mathcal{T}p)(\mathcal{T}x)} = e^{\mp ipx}$$

及び

$$\begin{cases} T^{-1}u_s(\mathbb{P})T = u_s^*(\mathbb{P}) \\ T^{-1}v_s(\mathbb{P})T = v_s^*(\mathbb{P}) \end{cases}$$

∵ u_sのみ示す (v_sも同様)

$$T^{-1}\gamma^{\mu}T = \begin{cases} +\gamma^{\mu} = (\gamma^{\mu})^* & (\mu \neq 2) \\ -\gamma^{\mu} = (\gamma^{\mu})^* & (\mu = 2) \end{cases}$$

より,

$$T^{-1}K^{j}T = \begin{cases} K^{j} & (j \neq 2) \\ -K^{j} & (j = 2) \end{cases}$$

$$= (\mathbb{K}^j)^*$$

なので

$$T^{-1} u_s(\mathbb{P}) T = \left(T^{-1} e^{i\eta \hat{\mathbb{P}}\cdot\mathbb{K}} T\right)\left(T^{-1} u_s(\mathbb{0}) T\right)$$

$$= e^{-i\eta\hat{\mathbb{P}}\cdot\mathbb{K}^*} u_s(\mathbb{0})$$

$\left(T^{-1} i T = -i \text{ を用いた} \right)$

$$= e^{(i\eta\hat{\mathbb{P}}\cdot\mathbb{K})^*} u_s(\mathbb{0})$$

$$= \left(e^{i\eta\hat{\mathbb{P}}\cdot\mathbb{K}} u_s(\mathbb{0})\right)^*$$

$$= u_s^*(\mathbb{P})$$

と示される.

なので,

$$T^{-1}\underline{\psi}(x) T = \sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\Big[\left(T^{-1} b_s(\mathbb{P}) T\right)\left(T^{-1} u_s(\mathbb{P}) T\right)\left(T^{-1} e^{ipx} T\right)$$

$$+ \left(T^{-1} d_s^\dagger(\mathbb{P}) T\right)\left(T^{-1} v_s(\mathbb{P}) T\right)\left(T^{-1} e^{-ipx} T\right)\Big]$$

$$= \sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\left(T^{-1} b_s(\mathbb{P}) T\right) u_s^*(\mathbb{P}) e^{-ipx} + \left(T^{-1} d_s^\dagger(\mathbb{P}) T\right) v_s^*(\mathbb{P}) e^{ipx}\right]$$

$$= \sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\zeta_s^* b_{-s}(-\mathbb{P}) u_s^*(\mathbb{P}) e^{-ipx} + \zeta_s d_{-s}^\dagger(-\mathbb{P}) v_s^*(\mathbb{P}) e^{ipx}\right]$$

$\mathbb{P} \to -\mathbb{P}$

$s \to -s$

$$= \sum_{s=\pm}\int d\tilde{p}\left[\zeta_{-s}^* b_s(\mathbb{P}) u_{-s}^*(-\mathbb{P}) e^{ipTx} + \zeta_{-s} d_s^\dagger(\mathbb{P}) v_{-s}^*(-\mathbb{P}) e^{-ipTx}\right]$$

ここに (38.40)

$$\begin{cases} u_{-s}^*(-\mathbb{P}) = -s C \gamma_5 u_s(\mathbb{P}) \\ v_{-s}^*(-\mathbb{P}) = -s C \gamma_5 v_s(\mathbb{P}) \end{cases}$$

を用い $\zeta_s = s$ に選ぶと

$$T^{-1}\Psi(x)\,T = (-s)^2 C\gamma_5 \Psi(\mathcal{T}x)$$

$$= C\gamma_5 \Psi(\mathcal{T}x)$$

つまり $\quad D(T) = C\gamma_5$

注
- $\zeta_s = -s$ に選んでいたら $D(T) = -C\gamma_5$ になる.
- ζ_s に s dep. を持たせず, $\zeta_s = 1$ などにしていたら
このようなきれいな変換則は得られない.

○ Weyl 場の変換性

$$C = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\delta_a{}^c & 0 \\ 0 & +\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix}$$

なので,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} \chi_a(x) \\ \xi^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\delta_b{}^c & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{b}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_c(\mathcal{T}x) \\ \xi^{\dagger\dot{c}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab}\delta_b{}^c\chi_c(\mathcal{T}x) \\ -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\delta^{\dot{b}}{}_{\dot{c}}\xi^{\dagger\dot{c}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} T^{-1}\chi_a(x)\,T = +\chi^a(\mathcal{T}x) \\ T^{-1}\xi^{\dagger\dot{a}}(x)\,T = -\xi^\dagger_{\dot{a}}(\mathcal{T}x) \end{cases} \qquad (40.32)$$

⇒ time-reversal では left-handed と right-handed は
入れ替わらない.

また, (Parity のときと同様の計算なので飛ばしても構わない)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \to c \\ \dot{a} \to \dot{c} \end{pmatrix} \\ (40.32) \end{cases} \xRightarrow{\text{h.c.}} \begin{cases} T^{-1}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(x)T = \chi^{\dagger\dot{c}}(Tx) \\ T^{-1}\xi^{c}(x)T = -\xi_c(Tx) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \times\,\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \\ \Rightarrow \\ \times\,\varepsilon_{ac} \end{matrix} \begin{cases} T^{-1}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\chi^{\dagger}_{\dot{c}}(x)T = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}\chi^{\dagger\dot{c}}(Tx) \\ T^{-1}\varepsilon_{ac}\xi^{c}(x)T = (-)^2\varepsilon^{ac}\xi_c(Tx) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^{-1}\chi^{\dagger\dot{a}}(x)T = -\chi^{\dagger}_{\dot{a}}(Tx) \\ T^{-1}\xi_a(x)T = +\xi^{a}(Tx) \end{cases} \qquad (40.33)$$

(40.32) と (40.33) は合わせて Majorana 条件
$\chi_a(x) = \xi_a(x)$ に整合.

▨ $\bar{\Psi}A\Psi$ の変換性

ここでは γ 行列の組み合せからなるような op. A について
$\bar{\Psi}A\Psi$ の変換性を各々見る.

なお, $\bar{A} \equiv \beta A^{\dagger}\beta$

とするとき,

$$(\bar{\Psi}A\Psi)^{\dagger} = \Psi^{\dagger}A^{\dagger}\beta\Psi = \bar{\Psi}\bar{A}\Psi$$

と書けるが, $\bar{A} = A$ のときは

$$(\bar{\Psi}A\Psi)^{\dagger} = \bar{\Psi}A\Psi \quad : \text{エルミート}$$

エルミートな場合のみ考えたいので, 以下では
$\bar{A} = A$ が成り立つようなAに限って考えていく.

No
Date

◦ Parity

まず

$$P^{-1}\bar{\Psi}(x)P = \left(P^{-1}\Psi^\dagger(x)P\right)\left(P^{-1}\beta P\right)$$

$\downarrow (40.15)^\dagger$

$$= \left(-i\Psi^\dagger(\mathcal{P}x)\beta\right)\beta$$

$$= -i\bar{\Psi}(\mathcal{P}x)\beta$$

なので

$$P^{-1}(\bar{\Psi}A\Psi)P = \left(P^{-1}\bar{\Psi}P\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}\Psi P\right)$$

$$= \bar{\Psi}\beta\left(P^{-1}AP\right)\beta\Psi$$

$P^{-1}\gamma^\mu P = \gamma^\mu$ より
$\downarrow\ P^{-1}AP = A$

$$= \bar{\Psi}(\beta A\beta)\Psi$$

が言える(引数省略).

Aとして具体的に次のようなものを考える:

$$\beta 1 \beta = +1$$

$$\beta i\gamma_5 \beta = -i\gamma_5$$

$$\beta\gamma^0\beta = +\gamma^0$$

$$\beta\gamma^i\beta = -\gamma^i$$

$$\beta\gamma^0\gamma_5\beta = -\gamma^0\gamma_5$$

$$\beta\gamma^i\gamma_5\beta = +\gamma^i\gamma_5$$

($(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ よりこれらは $\bar{A} = A$ であることが直ちにわかる)

これらによる $P^{-1}(\bar{\Psi} A \Psi) P$ を書き下すと

$$P^{-1}(\bar{\Psi}\Psi)P = +\bar{\Psi}\Psi$$ ：スカラー

$$P^{-1}(\bar{\Psi} i\gamma_5 \Psi)P = -\bar{\Psi} i\gamma_5 \Psi$$ ：擬スカラー

$$P^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)P = +\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$ ：ベクトル

$$P^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\Psi}\gamma^\nu\gamma_5\Psi$$ ：擬ベクトル

注

$$P^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)P = \begin{cases} \bar{\Psi}\gamma^0\Psi & (\mu = 0) \\ -\bar{\Psi}\gamma^i\Psi & (\mu = i) \end{cases}$$

$$= +\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi$$

$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$ も同様.

◦ Time-reversal

まず

$$T^{-1}\bar{\Psi}(x)T = \left(T^{-1}\Psi^\dagger(x)T\right)\left(T^{-1}\beta T\right) \quad \text{☆}$$

$$= \left(T^{-1}\Psi(x)T\right)^\dagger \beta$$

$$= \left(C\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x)\right)^\dagger \beta$$

$$= \Psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma_5{}^\dagger C^{-1}\beta \quad (\because C^\dagger = C^{-1})$$

$$= \bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\beta\gamma_5 C^{-1}\beta$$

$$= -\bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5\beta C^{-1}\beta$$

No.

Date

$$= \bar{\Psi}(Tx)\gamma_5 C^{-1}(\beta)^2 \quad \left(\begin{array}{l} C^{-1}\gamma^0 C = -\gamma^0 \\ \gamma^0 C^{-1} = -C^{-1}\gamma^0 \end{array} \text{より}\right)$$

$$= \bar{\Psi}(Tx)\gamma_5 C^{-1}$$

☆ の補足

$$T^{-1} i T = -i$$

この両辺 $\dagger$ を取って

$$T^{\dagger} i (T^{-1})^{\dagger} = -i$$

両者の比較から、

$$T^{\dagger} = \alpha T^{-1}, \quad (T^{-1})^{\dagger} = \frac{1}{\alpha} T \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

のはずなので、

$$(T^{-1}\Psi(x)T)^{\dagger} = T^{\dagger}\Psi^{\dagger}(x)(T^{-1})^{\dagger}$$

$$= T^{-1}\Psi^{\dagger}(x)T$$

となり ☆ の式変形は保証される。

なので、

$$T^{-1}(\bar{\Psi}A\Psi)\Psi = (T^{-1}\bar{\Psi}T)(T^{-1}AT)(T^{-1}\Psi T)$$

$$= \bar{\Psi}(\gamma_5 C^{-1}A^{*}C\gamma_5)\Psi$$

が言える。ただしここで

$$T^{-1}AT = A^{*}$$

を用いた。

[∵ $T^{-1}\gamma^{\mu}T = (\gamma^{\mu})^{*}$

を思い出せばよい。

ここで A として 1, $i\gamma_5$, γ^μ, $\gamma^\mu\gamma_5$ を考えることにすると、

$$\begin{cases} C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T , & C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5 \\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 , \quad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 , & (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \\ (\gamma^0)^2 = (\gamma_5)^2 = I , & \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \end{cases}$$

等を用いて

$$\begin{cases} \gamma_5 C^{-1} 1^* C\gamma_5 = +1 \\ \gamma_5 C^{-1}(i\gamma_5)^* C\gamma_5 = -i\gamma_5 \\ \gamma_5 C^{-1}(\gamma^0)^* C\gamma_5 = +\gamma^0 \\ \gamma_5 C^{-1}(\gamma^i)^* C\gamma_5 = -\gamma^i \\ \gamma_5 C^{-1}(\gamma^0\gamma_5)^* C\gamma_5 = +\gamma^0\gamma_5 \\ \gamma_5 C^{-1}(\gamma^i\gamma_5)^* C\gamma_5 = -\gamma^i\gamma_5 \end{cases}$$

なので次が言える。

$$T^{-1}(\bar{\Psi}\Psi)T = +\bar{\Psi}\Psi$$

$$T^{-1}(\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi)T = -\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi$$

$$T^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi$$

$$T^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\gamma_5\Psi$$

○ Charge conjugation

Section 36 の (36.35) とその Dirac 共役を考えると,

$$C^{-1}\Psi(x)C = C\overline{\Psi}^{T}(x)$$

$$C^{-1}\overline{\Psi}(x)C = \Psi^{T}(x)C$$

なので

$$C^{-1}(\overline{\Psi}A\Psi)C = (C^{-1}\overline{\Psi}C)(C^{-1}AC)(C^{-1}\Psi C)$$

(36.36)より Cはユニタリ なので $C^{-1}AC=A$

$$= \Psi^{T}CAC\overline{\Psi}^{T}$$

☆′

$$= -\overline{\Psi}C^{T}A^{T}C^{T}\Psi$$

$(\because C^{T}=C^{-1}=-C)$

$$= \overline{\Psi}(C^{-1}A^{T}C)\Psi$$

である.

☆′ の補足

h.c. した?

さて例によって A として $1, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5$ を考えるが、

$$C^{-1} 1^T C = +1$$

$$C^{-1}(i\gamma_5)^T C = +i\gamma_5$$

$$C^{-1}(\gamma^\mu)^T C = -\gamma^\mu$$

$$C^{-1}(\gamma^\mu\gamma_5)^T C = +\gamma^\mu\gamma_5$$

なので（証明略。）

$$C^{-1}(\bar{\Psi}\Psi)C = +\bar{\Psi}\Psi$$

$$C^{-1}(\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi)C = +\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi$$

$$C^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)C = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

$$C^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)C = +\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$$

カレントが負になっている。
$\updownarrow$
粒子・反粒子の入れ替え。

ちなみに、Majorana 条件 $C^{-1}\Psi C = \Psi$, $C^{-1}\bar{\Psi}C = \bar{\Psi}$ の下では常に

$$C^{-1}(\bar{\Psi}A\Psi)C = (C^{-1}\bar{\Psi}C)(C^{-1}AC)(C^{-1}\Psi C)$$

$$= \bar{\Psi}A\Psi$$

なので、Majorana 場では

$$C^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)C = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

$$\therefore \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0$$

cf. Majorana場での $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi=0$ について.

Majorana場で

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0$$

は粒子数0を意味しない.

というのも、そもそもMajorana場のLagrangian

$$\mathcal{L}_{majorana} = \frac{i}{2}\Psi^T C\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}m\Psi^T C\Psi$$

は $U(1)$ sym を持たず、$U(1)$ のネーターカレントを導入できないので、$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ という量は意味を持たないのだ.

∵ 例えば第2項は

$$\Psi \to \Psi' = e^{-i\alpha}\Psi$$

において

$$\frac{m}{2}\Psi'^T C\Psi' = e^{-2i\alpha}\frac{m}{2}\Psi^T C\Psi$$

$$\neq \frac{m}{2}\Psi^T C\Psi$$

▨ CPT対称性

これまでの議論から、次が容易にわかる:

$$(CPT)^{-1}(\bar{\Psi}\Psi)(CPT) = +\bar{\Psi}\Psi$$

$$(CPT)^{-1}(\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi)(CPT) = +\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi$$

$$(CPT)^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)(CPT) = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

$$(CPT)^{-1}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)(CPT) = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$$

(ただし $P^\mu{}_\nu T^\nu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho$ を用いた)

これは次の事実の具体例である：

Thm

$\bar{\psi} A \psi$ のベクトルの添え字の数を n とすると，

$$(CPT)^{-1}(\bar{\psi} A \psi)(CPT) = \begin{cases} +\bar{\psi} A \psi & (n : \text{even}) \\ -\bar{\psi} A \psi & (n : \text{odd}) \end{cases}$$

これはベクトルの添え字が ∂_μ によるものでも成立。

Lagrangian は Lorentz スカラーから構成されるので，
上の Thm より，次が成立。

Thm　CPT定理

CPT変換の下，作用 $S = \int d^4x \mathcal{L}$ は不変。