§3. 右巻スピン，左巻スピン

素粒子の挙動が相対論的であるため、38.28の相対論極限を考える。

三元運動量を、量子化軸zに平行に採る。この三元運動量をヘリシティと呼ぶ。$+\frac{1}{2}$のヘリシティを右巻き、$-\frac{1}{2}$のヘリシティを左巻きとする。

Rapidityを用いると、

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m}p^\mu &= (\cosh\eta,\ 0,\ 0,\ \sinh\eta) \\ z^\mu &= (\sinh\eta,\ 0,\ 0,\ \cosh\eta) \end{aligned}\right\} \quad (38.29)$$

である。オ1式は定義、オ2式は $z^2=1$，$p\cdot z=0$ から従う。$\eta\to\infty$ の極限を採ると、

$$\frac{1}{m}p^\mu \sim \left(\tfrac{1}{2}e^\eta, 0, 0, \tfrac{1}{2}e^\eta\right)$$

$$z^\mu \sim \left(\tfrac{1}{2}e^\eta, 0, 0, \tfrac{1}{2}e^\eta\right)$$

$$\therefore\ z^\mu = \frac{1}{m}p^\mu + O(e^{-\eta}) \qquad (38.30)$$

38.28に代入すると、37.26に注意して、

$$u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(1-s\gamma_5\frac{\not{p}}{m}\right)(-\not{p}+m) = \frac{1}{2}\left(-\not{p}+m+s\gamma_5\frac{\not{p}^2}{m}-s\gamma_5\not{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\not{p}+m-s\gamma_5\frac{p^2}{m}-s\gamma_5\not{p}\right) = \frac{1}{2}(1+s\gamma_5)(-\not{p}+m)$$

$$v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \frac{1}{2}(1-s\gamma_5)(-\not{p}-m)$$

相対論極限では $\not{p}$ に比してmが無視できる。

$$\left.\begin{aligned} u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1+s\gamma_5)(-\not{p}) \\ v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1-s\gamma_5)(-\not{p}) \end{aligned}\right\} \quad (38.31)$$

38.31は、ヘリシティ $+\frac{1}{2}$ の右巻フェルミ粒子は、スピノール $u_+(\vec{p})$ を伴うb粒子、$-\frac{1}{2}$ の左巻フェルミ粒子は、スピノール $v_-(\vec{p})$ のd粒子であること、対角行列 $\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)$ でDirac場の右Weylスピノル、左Weylスピノルを写像する。

massless粒子の場合はmass有粒子の相対論極限から従う。??

§4. 並進以外の対称性

詳細は40節で。此処では、パリティ、時間反転、荷電共役の行列について簡単に挙げる。

$$\beta u_s(\vec{0}) = +u_s(\vec{0}),\quad \beta v_s(\vec{0}) = -v_s(\vec{0})$$

$$\cancel{[\beta, K^j] = 0} \quad \{\beta, K^j\} = 0$$

$$u_s(-\vec{p}) = +\beta v_s(\vec{p}),\quad v_s(-\vec{p}) = -\beta u_s(\vec{p})$$

$$C := \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C,\quad \beta C = -C\beta,\quad C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$$

歪エルミートに注意

など

$$C\bar{u}_s(\vec{p})^T = v_s(\vec{p}),\quad C\bar{v}_s(\vec{p})^T = u_s(\vec{p})$$