第38節 Spinor technology

§37に於いて一般的なDirac場を導出した。

$$\Psi(x)=\sum_{s=\pm}\int\widetilde{dp}\left[\underline{b_s(\vec p)}\,u_s(\vec p)e^{ipx}+\underline{d_s^\dagger(\vec p)}\,v_s(\vec p)e^{-ipx}\right]\quad(37.30)$$

3.19と比較すると、$a(\vec k)\to b_s(\vec p)u_s(\vec p)$, $a^*(\vec p)\to d_s^\dagger(\vec p)v_s(\vec p)$ と変更され、場の生成消滅にスピノルが織り込まれているのが判る。

$$\varphi(x)=\int\widetilde{dk}\left[\underline{a(\vec k)}\,e^{ikx}+\underline{a^*(\vec k)}\,e^{-ikx}\right]\quad(3.19)$$

§38では、スピノル場 $u_s(\vec p)$, $v_s(\vec p)$ についての方程式の解き方を、$\vec p=\vec 0$ の場合を中心に取り扱い、これらの場から右巻きスピン、左巻きスピンが導入される様子を見る。

§1. 前提と行列表示

1.1 前提

§37に於いてDirac方程式の平面波解が満たすべき条件37.28から導かれた式がスピノル場の方程式である。

$$\left.\begin{aligned}(\not p+m)\,u_s(\vec p)&=0\\(-\not p+m)\,v_s(\vec p)&=0\end{aligned}\right\}(38.1)$$

差し当たって $m\neq0$ とする。$m\neq0$ について $\vec p=\vec 0$（静止）で考えてもよく、(38.1)の各々の方程式は、スピン行列

$$S_z=\frac{i}{4}[\gamma_1,\gamma_2]\underset{\text{cf. 36.9}}{\boxed{=}}\frac{i}{2}\gamma_1\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac12\sigma_3&0\\0&\frac12\sigma_3\end{bmatrix}\quad(38.2)$$

の固有値で分類される2つの解を有する。S_zに対し以下を要請。

$$\left.\begin{aligned}S_z u_\pm(\vec 0)&=\pm\frac12 u_\pm(\vec 0)\\S_z v_\pm(\vec 0)&=\boxed{\mp}\frac12 v_\pm(\vec 0)\end{aligned}\quad(\text{複号同順})\right\}\quad(38.3)$$

$b_+^\dagger(\vec 0)$, $d_+^\dagger(\vec 0)$ を各々z軸に沿ったアップスピンを有するb粒子、d粒子の生成演算子としたい。

$$\left.\begin{aligned}[J_z,\ b_\pm^\dagger(\vec 0)]&=\pm\frac12 b_\pm^\dagger(\vec 0)\\[J_z,\ d_\pm^\dagger(\vec 0)]&=\boxed{\pm}\frac12 d_\pm^\dagger(\vec 0)\end{aligned}\right\}\quad(38.4)$$

このためには、$v_\pm(\vec 0)$ に対する S_z 固有値は符号反転する必要あり。

問39.2

1.2 行列表示とbarスピノール

$\vec p=\vec 0$ のスピノル場を行列表示し、スピノルのbar共役を得る。

$\vec p=\vec 0$ から $\not p$ は質量項のみ。4元スピノル場を適当に規格化、位相選択し、行列表示する。

$$\not p=p_\mu\gamma^\mu=p_0\gamma^0=-m\gamma^0\quad\Bigg(\underset{(36.21)\text{の前後}}{\underline{\gamma^0=\begin{bmatrix}0&I\\I&0\end{bmatrix}=\beta}}\Bigg)\ (38.5)$$

$$u_+(\vec 0):=\sqrt m\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ u_-(\vec 0)=\sqrt m\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_+(\vec 0)=\sqrt m\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\ v_-(\vec 0)=\sqrt m\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\ (38.6)$$

後の利便性の為、barスピノル $\bar u_s(\vec p)$, $\bar v_s(\vec p)$ を以下で定義。

$$\bar u_s(\vec p):=u_s^\dagger(\vec p)\beta,\quad\bar v_s(\vec p):=v_s^\dagger(\vec p)\beta\quad(38.7)$$

βは以下の性質を満たす。

$$\underset{\text{エルミートかつユニタリ}}{\underline{\beta^T=\beta^\dagger=\beta^{-1}=\beta}}\quad(38.9)\leftarrow\text{番号はtext準拠}$$

barスピノルの行列表示は、

$$\left.\begin{aligned}\bar u_+(\vec 0)&=\sqrt m(1,0,1,0),\ \bar u_-(\vec 0)=\sqrt m(0,1,0,1)\\\bar v_+(\vec 0)&=\sqrt m(0,-1,0,1),\ \bar v_-(\vec 0)=\sqrt m(1,0,-1,0)\end{aligned}\right\}(38.10)$$

1.3 barスピノルの方程式

(38.1)式に相当するbarスピノルの方程式を得る。

任意の3次元運動量方向とスピノル場の方向は、Lorentz変換行列 $D(\Lambda)$ で一致させることが可能。

$$D(\Lambda)=\exp(i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\quad(38.11)$$

$\hat p$ は運動量方向の単位ベクトル、$\mathbb{K}$ は並進行列、η はRapidity。$\mathbb{K}$ は

$$K^j=\frac i4[\gamma^j,\gamma^0]=\frac i2\gamma^j\gamma^0$$

であり、Rapidity $\eta=\sinh^{-1}(|\vec p|/m)$ である。Rapidityの本来の定義は、

$$\tanh\eta:=\frac{|\vec v|}{c}$$

である。4元運動量の2元版 $(\frac Ec,\vec p)\to(\frac Ec,p)$ を考えると、

$$\begin{cases}\dfrac Ec=mc\gamma=mc\cosh\eta\\p=mv\gamma\end{cases}\quad\cdots(*)$$

となるので、辺々割ると、

$$\frac{cp}{E}=\frac vc=\tanh\eta$$

(*)式第一式の2番目の等号から、

$$\frac{p}{mc\cosh\eta}=\tanh\eta\quad\therefore\ \frac pm=\sinh\eta\quad(c=1)$$

故に、$\eta=\sinh^{-1}\left(\frac{|\vec p|}{m}\right)$ を得る。

(38.11)の要点は、非常に美しいことである。

$\vec p\neq\vec 0$ のスピノル場は、$D(\Lambda)$ によりLorentz変換で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}u_s(\vec p)&=\exp(i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})u_s(\vec 0)\\v_s(\vec p)&=\exp(i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})v_s(\vec 0)\end{aligned}\right\}(38.12)$$

(38.12)のbar共役を得るため、幾つかの考察を行う。まず $\hat p\cdot\mathbb{K}$ について。これは行列の線型結合に過ぎず、$\hat p$ は実ベクトルであるから、

$$(\hat p\cdot\mathbb{K})^\dagger=\mathbb{K}^\dagger\cdot\hat p=\hat p\cdot\mathbb{K}^\dagger$$

$\mathbb{K}$ の要素について、$\bar K^j=\beta(K^j)^\dagger\beta$ であり、(38.9)とから、

$$\beta^{-1}\bar K^j=\beta^\dagger\bar K^j=(K^j)^\dagger\beta$$

が成り立つこと、更に、$j\neq0$ なら $(\gamma^j)^\dagger=-\gamma^j$ となることから、

$$\bar K^j=\beta\left(\frac i2\gamma^j\gamma^0\right)^\dagger\beta=\beta\left[-\frac i2\beta^\dagger(\gamma^j)^\dagger\right]\beta=\frac i2\gamma^j\gamma^0$$
$$=K^j$$

が成り立つことなどから、以下のようになる。$\bar u_s(\vec p)$ について、

$$\begin{aligned}\bar u_s(\vec p)&=u_s^\dagger(\vec p)\beta=\left[\exp(i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\,u_s(\vec 0)\right]^\dagger\beta\\&=u_s^\dagger(\vec 0)\exp[-i\eta(\hat p\cdot\mathbb{K})^\dagger]\beta=u_s^\dagger(\vec 0)\exp(-i\eta\hat p\cdot\mathbb{K}^\dagger)\beta\\&=u_s^\dagger(\vec 0)\beta^{-1}\exp(-i\eta\hat p\cdot\bar{\mathbb{K}})=u_s^\dagger(\vec 0)\beta\exp(-i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\end{aligned}$$

同様に、

$$\left.\begin{aligned}&=\bar u_s(\vec 0)\exp(-i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\\\bar v_s(\vec p)&=\bar v_s(\vec 0)\exp(-i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\end{aligned}\right\}(38.14)$$

教科書の38.14式で、$A=\gamma^\mu$ とすると、γ^μ が $\mu\neq0$ の時に歪エルミート対称であること、$i^i\to i_i$ の縮約の転換で負号が出ることなどから、

$$\bar\gamma^\mu=\gamma^\mu\quad(38.15)$$

が得られる。

以上から、(38.1)のbar共役が得られる。

$$\overline{(\not p+m)u_s(\vec p)}=\bar u_s(\vec p)(p_\mu\bar\gamma^\mu+m)=\bar u_s(\vec p)(p_\mu\gamma^\mu+m)$$
$$\left.\begin{aligned}&=\bar u_s(\vec p)(\not p+m)=0\\&\bar v_s(\vec p)(-\not p+m)=0\end{aligned}\right\}(38.16)$$

§2. スピノル方程式の解法

(38.12)には行列の指数関数が含まれているため、38.1や38.16へ直接代入するのは困難。代わりに2つのスピノル場の内積 $\bar u_s u_s$ などを考察するのが便利。

2.1 Gordonの恒等式

38.12と38.13, $\vec p=\vec 0$ でのスピノル場の行列表示から、スピノル場の直交性が言える。

$$\begin{aligned}\bar u_{s'}(\vec p)u_s(\vec p)&=\bar u_{s'}(\vec 0)\exp(-i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})\exp(i\eta\hat p\cdot\mathbb{K})u_s(\vec 0)\\&=\bar u_{s'}(\vec 0)u_s(\vec 0)=\begin{cases}\sqrt m[1,0,1,0]\sqrt m\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=2m\\\sqrt m[0,1,0,1]\sqrt m\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0\quad\text{など}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=2m\delta_{s's}\\\bar v_{s'}(\vec p)v_s(\vec p)&=-2m\delta_{s's}\\\bar u_{s'}(\vec p)v_s(\vec p)&=0\\\bar v_{s'}(\vec p)u_s(\vec p)&=0\end{aligned}\right\}(38.17)$$

Gordon恒等式を導く。$\gamma^\mu\not p$, $\not p'\gamma^\mu$ を交換子と反交換子を利用して書き換える。$\gamma^\mu\not p$ について、p_ν は数だから、

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\not p&=\frac12\{\gamma^\mu,\not p\}+\frac12[\gamma^\mu,\not p]=\frac12\{\gamma^\mu,p_\nu\gamma^\nu\}+\frac12[\gamma^\mu,p_\nu\gamma^\nu]\\&=\frac12p_\nu\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}+\frac12[\gamma^\mu,\gamma^\nu]p_\nu\end{aligned}$$

$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=-2g^{\mu\nu}$, $[\gamma^\mu,\gamma^\nu]=-4iS^{\mu\nu}$（36.53式）により、

$$=-p_\nu g^{\mu\nu}-2iS^{\mu\nu}p_\nu=-p^\mu-2iS^{\mu\nu}p_\nu\quad(38.19)$$

$\not p'\gamma^\mu$ については、

$$\not p'\gamma^\mu=-p'^\mu+2iS^{\mu\nu}p'_\nu\quad(38.20)$$

38.19と38.20を足し、$\bar u_{s'}(\vec p')$ と $u_s(\vec p)$ で内積を採る。途中、スピノルやbarスピノルの方程式を援用することで、

$$(\text{左辺})=\bar u_{s'}(\vec p')(\gamma^\mu\not p+\not p'\gamma^\mu)u_s(\vec p)=-2m\bar u_{s'}(\vec p')\gamma^\mu u_s(\vec p)$$
$$(\text{右辺})=\bar u_{s'}(\vec p')\left[-(p'^\mu+p^\mu)-2iS^{\mu\nu}(p'_\nu-p_\nu)\right]u_s(\vec p)$$

$\bar v_{s'}(\vec p')$, $v_s(\vec p)$ についても同じ作業を施す。以上でGordon恒等式が得られる。

$$2m\bar u_{s'}(\vec p')\gamma^\mu u_s(\vec p)=\bar u_{s'}(\vec p')\left[(p'^\mu+p^\mu)+2iS^{\mu\nu}(p'_\nu-p_\nu)\right]u_s(\vec p)$$
$$-2m\bar v_{s'}(\vec p')\gamma^\mu v_s(\vec p)=\bar v_{s'}(\vec p')\left[(p'^\mu+p^\mu)+2iS^{\mu\nu}(p'_\nu-p_\nu)\right]v_s(\vec p)$$

$\vec p=\vec p'$ とすると、$S^{\mu\nu}$ の項は消えるため、38.17より、

$$2m\bar u_{s'}(\vec p)\gamma^\mu u_s(\vec p)=2p^\mu\bar u_{s'}(\vec p)u_s(\vec p)=2p^\mu\cdot2m\delta_{s's}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar u_{s'}(\vec p)\gamma^\mu u_s(\vec p)&=2p^\mu\delta_{s's}\\\bar v_{s'}(\vec p)\gamma^\mu v_s(\vec p)&=2p^\mu\delta_{s's}\end{aligned}\right\}(38.21)$$

異なるスピノール場同士で同様の手続きを繰り返すと、

$$\left.\begin{aligned}\bar u_{s'}(\vec p)\gamma^0v_s(-\vec p)&=0\\\bar v_{s'}(\vec p)\gamma^0u_s(-\vec p)&=0\end{aligned}\right\}(38.22)$$

が得られる。$\underline{\mu\neq0}$ ではGordon恒等式の導出で登場した（左辺）=の式が0になってしまい、38.22の形にならない。(38.21)(38.22)は次節で活躍。

2.2. スピンの和

スピンの和 $\sum_{s=\pm}u_s(\vec p)\bar u_s(\vec p)$ を考える。$v_s(\vec p)$, $\bar v_s(\vec p)$ についても議論の方向性は一緒。

スピンの和を考えることは、スピン演算子 S_z の固有値を足すことを意味し、量子化軸の情報は失われるのが妥当。この欠落は、4元運動量とγ行列による和を採る際に、縮約によって添字が潰れる点に現れる。

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=\pm}u_s(\vec p)\bar u_s(\vec p)&=-\not p+m\\\sum_{s=\pm}v_s(\vec p)\bar v_s(\vec p)&=-\not p-m\end{aligned}\right\}(38.23)$$

38.23は散乱断面積の計算で活躍。

2.3. カイラルプロジェクションマトリクス

(38.23)の重ね合わされたスピノールに適当なスピン投映マトリクスを作用させると、$u_+(\vec p)\bar u_+(\vec p)$ のような個別のスピノールが得られる。この投影マトリクスの並進に役立つのがカイラルプロジェクションマトリクス γ_5 である。

静止系の場合（$\vec p=\vec 0$）、

$$\left.\begin{aligned}\frac12(1+2sS_z)u_{s'}(\vec 0)&=\delta_{ss'}u_{s'}(\vec 0)\\\frac12(1-2sS_z)v_{s'}(\vec 0)&=\delta_{ss'}v_{s'}(\vec 0)\end{aligned}\right\}(38.24)$$

より一般の系に拡げるためにはスピン投映行列を並進させる必要があり、カイラルプロジェクションマトリクスを導入する。

$$\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{bmatrix}-I&0\\0&I\end{bmatrix}\quad(38.25)$$

γ^5 により、S_z を以下のように書き替え可能。

$$S_z=\frac i2\gamma^1\gamma^2=-\frac12\gamma_5\gamma^3\gamma^0=\frac1{2m}\gamma_5\not z\not p\quad(38.26)$$

ただし、最後の等号では、静止系に於いて $\not p=-m\gamma^0$ が成り立つこと、$\not z=z_\mu\gamma^\mu\ (z_\mu=(0,\hat z))=\gamma^3$ となることを用いた。

38.24の並進は $\not z$, $\not p$ を適当に変えればよく、38.1により

$$\left.\begin{aligned}\frac12(1-s\gamma^5\not z)u_{s'}(\vec p)&=\delta_{ss'}u_{s'}(\vec p)\\\frac12(1-s\gamma^5\not z)v_{s'}(\vec p)&=\delta_{ss'}v_{s'}(\vec p)\end{aligned}\right\}(38.27)$$

38.23と38.27から

$$\left.\begin{aligned}u_s(\vec p)\bar u_s(\vec p)&=\frac12(1-s\gamma^5\not z)(-\not p+m)\\v_s(\vec p)\bar v_s(\vec p)&=\frac12(1-s\gamma^5\not z)(-\not p-m)\end{aligned}\right\}(38.28)$$