Charge conjugation

(36.16)を見ると $\xi \longleftrightarrow \chi$ の変換で $\mathcal{L}$ は不変であり、この交換は $\mathbb{Z}_2$ の離散対称性をもつ
これを charge conjugation とよぶ

この $\mathbb{Z}_2$ symmetry と $U(1)$ symmetry ($\simeq SO(2)$)
は合わさると、結局この $\mathcal{L}$ は
$O(2)$ と同型な symmetry を持つことになる

($O(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(2)$ である)

χ と ξ を入れ替えるユニタリ演算子 C を

$$C^{-1}\chi_a(x)C = \xi_a(x)$$

$$C^{-1}\xi_a(x)C = \chi_a(x)$$

と定義する (36.31)

このとき、spinor-index, space-time argument を考慮しても

$$C^{-1}\mathcal{L}(x)C = \mathcal{L}(x)$$

となる

このとき charge conjugation matrix は

$$C \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{ac} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix} \qquad (36.32)$$

Dirac field Ψ の charge conjugation Ψ^C は

$$\Psi^C \equiv C\overline{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \chi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix}$$ と書け

$$C^{-1}\Psi(x)C = \Psi^C(x)$$ を満たす
(Dirac field)

C は numerical matrix として次の良い性質を満たす

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$$

(orthogonal, unitary, skew-hermitian ...etc)

$$C = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ac} & \\ & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix}$$ と書けるので

$$C^{-1}\gamma^\mu C = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{e\dot{a}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{e}a} & 0 \end{pmatrix} \qquad (36.39)$$

すなわち $$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$$

- Majorana field

Majorana fieldは $\Psi = \Psi^c$ を満たす

(
- Majorana粒子は粒子と反粒子が同一の中性fermion
- Majorana field はU(1) symmetryがなく
粒子同士で対消滅できる
cf. 二重β崩壊探索
)

これは real scalar field における $\psi = \psi^\dagger$ に似ている。

一方、U(1) symmetryを持つDirac fieldの構造は complex scalar fieldと類似している。

$\mathcal{L}$ を Majorana fieldで書きたい、
先にDirac fieldでしたのと同様にすれば

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}m\overline{\Psi}\Psi$$

を得る (36.41)

Majorana condition $\Psi = \Psi^C$ より

$$\rightarrow \Psi = C\overline{\Psi}^T$$
$$\rightarrow \overline{\Psi} = \Psi^T C$$ を加えれば

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\Psi^T C \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{1}{2} m \Psi^T C \Psi \quad (36.42)$$

この形式からEoMを計算すれば
やはりDirac equationの形(36.11)となる

◎ Weyl components

適切な射影行列(projection matrix)
を用いることによってDirac fieldまたはMajorana
field におけるWeyl成分を得ることができる

$$\gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} -\delta_a{}^c & 0 \\ 0 & +\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \quad (36.43)$$

※数字の5に
特に意味はない

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$$
$$= -\frac{i}{24}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

(但し、$\varepsilon_{0123} = -1$) を満たす

left や right への射影行列は

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} \delta_a{}^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \qquad (36.44)$$

特に Dirac field の場合

$$P_L \Psi = \begin{pmatrix} \chi_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{\dagger \dot{c}} \end{pmatrix}$$

⑩ Lorentz transformation

left- and right- handed spinor は次のように変換されるのであった

$$(33.7)\quad \begin{cases} U(\Lambda)^{-1}\psi_a(x)U(\Lambda) = L(\Lambda)_a{}^c\psi_c(\Lambda^{-1}x) \\ U(\Lambda)^{-1}\psi^\dagger_{\dot{a}}(x)U(\Lambda) = R(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}}\psi^\dagger_{\dot{c}}(\Lambda^{-1}x) \end{cases}$$

(36.47), (36.48)

但し、微小変換 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu$ について

$$(35.7)\begin{cases} L(1+\delta\omega)_a{}^c = \delta_a{}^c + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a{}^c, \\ R(1+\delta\omega)_{\dot a}{}^{\dot c} = \delta_{\dot a}{}^{\dot c} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_R^{\mu\nu})_{\dot a}{}^{\dot c}, \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(35.21)\\(35.22)\end{matrix}\begin{cases} (S_L^{\mu\nu})_a{}^c = +\frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_a{}^c \\ (S_R^{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot c} = -\frac{i}{4}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot a}{}_{\dot c} \end{cases}$$

γ^μの定義(36.7)より

$$\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} +(S_L^{\mu\nu})_a{}^c & 0 \\ 0 & -(S_R^{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot c} \end{pmatrix}$$

$$\equiv S^{\mu\nu} \qquad (36.53)$$

ここで我々は Dirac or Majorana field の無限小変換の生成子を得た

$$U(\Lambda)^{-1}\Psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \qquad (36.54)$$

$$D(1+\delta\omega) = 1 + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$$