36 Lagrangian for spinor fields

担当：林

目標

- 適切なラグランジアンを構成し、EoM, field, symmetry を考える
- Charge conjugation, Weyl components, Lorentz transformation との関係を見る

① Lagrangian

ラグランジアンに求める条件は

- Lorentz invariant
- hermitian
- $\psi_a, \psi_a^\dagger$ について2次まで

基本的な項は

- $\boxed{\psi\psi + h.c.}$ $\quad (\psi\psi = \psi^a\psi_a = \varepsilon^{ab}\psi_b\psi_a)$
- $\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi + h.c.$ (実はよくない)

$\downarrow$

ハミルトニアンは有界でなければならず
運動項は $\psi, \psi^\dagger$ を含む。

$\downarrow$

そのような項の候補

$$\boxed{i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi}$$

$$(i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu(\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi) \qquad (36.1)$$

これは実質 hermitian として扱える

考えられるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m\psi\psi - \frac{1}{2}m^*\psi^\dagger\psi^\dagger \qquad (36.2)$$

(mには位相の不定性があり $m\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ とできる
このとき $m=m^*$)

◎ EoM for ψ, $\psi^\dagger$

$$0 = -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu\psi_c + m\psi^{\dagger\dot{a}}$$

$$0 = -i\sigma^\mu_{a\dot{c}}\partial_\mu\psi^{\dagger\dot{c}} + m\psi_a$$

作用の変分から求まる

まとめて

$$\begin{pmatrix} m\delta_a{}^c & -i\sigma^\mu_{a\dot{c}}\partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu & m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} = 0 \tag{36.6}$$

sigma-matrix relations を用いると

$$\begin{cases} (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^c = -2g^{\mu\nu}\delta_a{}^c \\ (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} = -2g^{\mu\nu}\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{cases} \tag{36.8}$$

gamma matrices

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{a\dot{c}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c} & 0 \end{pmatrix}$$ を導入

これは、$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}$ を満たす

またマヨラナ場を導入する

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix}$$

EoMは結局

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \qquad (36.11)$$

(Dirac eq)

と書ける。

◎ Two scalar fields with SO(2) symmetry

$$\mathcal{L} = i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} m \psi_i \psi_i - \frac{1}{2} m \psi_i^\dagger \psi_i^\dagger$$

$(i = 1, 2)$

※初めの i は虚数単位

これが SO(2) 変換

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\in SO(2)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

で不変とする

SO(2) $\cong$ U(1) (群同型) であるから
ラグランジアンをU(1) symmetryを持った形
にできる

実際

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2)$$
$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2)$$

とすれば

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + i\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - m\chi\xi - m\xi^\dagger\chi^\dagger \tag{36.16}$$

これは U(1) 変換

$\chi \to e^{-i\alpha}\chi$, $\xi \to e^{+i\alpha}\xi$ で不変

(36.16) から作用の変分を用いて新たに EoM を得る

(36.3-5) と同様にすれば

$$\begin{pmatrix} m\delta_a{}^c & -i\sigma^\mu_{a\dot{c}}\partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu & m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_c \\ \xi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} = 0$$

ここから 4 成分 ディラック場を定義する

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_c \\ \xi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix}$$ → Dirac eq を満たす

(マヨラナ場とディラック場は異なるものだが同じ記号「Ψ」で表しているので気をつけなければならない)

- ディラック場を用いたラグランジアンの構成

$$\Psi^\dagger = (\chi^\dagger_{\dot{a}}, \xi^a)$$

matrix $\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \\ \delta_a{}^c & 0 \end{pmatrix}$ を定義

ディラック共役 $\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \beta = (\xi^a, \chi^\dagger_{\dot{a}})$ を定義

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{\Psi}\Psi = \xi^a \chi_a + \chi^\dagger_{\dot{a}} \xi^{\dagger\dot{a}} & (36.23) \\ \overline{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \xi^a \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu \xi^{\dagger\dot{c}} + \chi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c} \partial_\mu \chi_c \\ \quad \vdots \\ \quad = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \\ \quad\quad + \partial_\mu (\xi \sigma^\mu \xi^\dagger) & (36.27) \end{cases}$$

(36.24)－(36.26)を用いた

全微分項を無視すれば、ラグランジアン(36.16)は

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{36.28}$$

これはU(1)変換について対称

$$\begin{cases} \Psi \to e^{-i\alpha}\Psi \\ \bar{\Psi} \to e^{+i\alpha}\bar{\Psi} \end{cases}$$

ここから現れるネーターカレントは

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi - \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi \tag{36.30}$$

(QEDでは $j^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ を電磁電流とよぶが、これはU(1)対称性により表れている)

また明らかに χ と ξ は反粒子の関係にある