4/24 齋藤一輝

No. Date

Section 3

① スピンゼロ相対論的自由粒子の理論を作り、ローレンツ不変性を確かめる.
② Klein-Gordon方程式の解として平面波解を想定し、古典場として議論する.
③ 正準量子化を行い、量子論的な理論にする.
④ この理論の課題

3 Canonical Quantization of Scalar Field

(1.32) のハミルトニアンで自由粒子の場合

$$H = \int d^3x\, a^+(x)\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)a(x)$$

$$= \int d^3p\, \frac{1}{2m}\mathbb{P}^2\, \hat{a}^+(\mathbb{P})\hat{a}(\mathbb{P}) \tag{3.1}$$

ここで $\hat{a}(\mathbb{P}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbb{P}\cdot x} a(x)$ (3.2)

$\hbar = 1$ (3.3)

である. 次元解析をすれば、$\hbar$はいつでも適切に戻すことができる.

※

$$H = \int d^3x \left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbb{P}\cdot x}\hat{a}^+(\mathbb{P})\right)\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\left(\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbb{P}'\cdot x}\hat{a}(\mathbb{P}')\right)$$

$$= \int d^3x \left(\qquad '' \qquad \right)\left(\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathbb{P}'^2}{2m} e^{i\mathbb{P}'\cdot x}\hat{a}(\mathbb{P}')\right)$$

$$= \int d^3p\int d^3p'\, \frac{1}{2m}\mathbb{P}'^2\, \hat{a}^+(\mathbb{P})\hat{a}(\mathbb{P}')\, \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{i(\mathbb{P}'-\mathbb{P})\cdot x}}_{\to\ \delta^3(\mathbb{P}'-\mathbb{P})}$$

$$= \int d^3p\,\frac{1}{2m}\mathbb{P}^2\,\hat{a}^+(\mathbb{P})\hat{a}(\mathbb{P})$$

$\hat{a}(\mathbb{P})$と$\hat{a}^+(\mathbb{P})$の(反)交換関係は次の通り

$$[\hat{a}(\mathbb{P}), \hat{a}^+(\mathbb{P}')]_{\mp} = \delta(\mathbb{P}-\mathbb{P}')$$
$$[\hat{a}(\mathbb{P}), \hat{a}(\mathbb{P}')]_{\mp} = 0$$
$$[\hat{a}^+(\mathbb{P}), \hat{a}^+(\mathbb{P}')]_{\mp} = 0 \tag{3.4}$$

ここで $[A,B]_{\mp} = AB \mp BA$ で マイナスはboson, プラスはfermionの理論の時.
それ故、$\hat{a}^+(\mathbb{P})$は運動量$\mathbb{P}$の状態の生成(演算子)といえる. 基底状態は$\hat{a}(\mathbb{P})$で消滅する.

$$\hat{a}(\mathbb{P})|0\rangle = 0 \tag{3.5}$$

また、エネルギー固有値は0. Hの他の固有状態は全て $\hat{a}^+(\mathbb{P}_1)\cdots\hat{a}^+(\mathbb{P}_n)|0\rangle$ の形をしており、
エネルギー固有値は $E(\mathbb{P}_1)+\cdots+E(\mathbb{P}_n)$. ($E(\mathbb{P}) = \frac{1}{2m}\mathbb{P}^2$)

相対論的なものにするには簡単で、$E(\mathbb{P}) = +(\mathbb{P}^2c^2+m^2c^4)^{\frac{1}{2}}$ を使えばよい.

$$H = \int d^3p\,(\mathbb{P}^2c^2+m^2c^4)^{\frac{1}{2}}\,\hat{a}^+(\mathbb{P})\hat{a}(\mathbb{P}) \tag{3.6}$$

今、相対論的スピンゼロ自由粒子の理論ができた. bosonsでもfermionsでもok!

この理論は本当にローレンツ不変なのか？

→ Yes．ローレンツ不変性を初めから強調した視点で作り直す．

実スカラー場 $\varphi(x)$ の古典物理から始める．

実スカラー場とは？ → 時空間のあらゆる点で実数をとり、ローレンツ変換でつながる あらゆる慣性系から観測しても同じ値をかえす場．

$(\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu,\ \varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x}))$

$\varphi(x)$ と $\bar{\varphi}(\bar{x})$ の EoM が同じであると示唆される．Klein-Gordon eq がそうなることは既知．(sec 1)

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{3.7}$$

$$c = 1 \tag{3.8}$$

(3.7)式を $\varphi(x)$ が従う EoM として採用しよう．今、実スカラー場の古典物理をしていることに注意．よって $\hbar$ のファクターはこの version の K-G eq の中に入るべきでない．

→ m は長さの逆数の次元：m はまだ質量として考えていない．

EoM は作用 $(S = \int dt L)$ の変分からできる．$(L$：lagrangian$)$．K-G eq は局所的なので lagrangian は lagrangian 密度の空間積分で書けるはず：$L = \int d^3x \mathcal{L}$

つまり $S = \int d^4x \mathcal{L}$．$d^4x$ はローレンツ不変 $(\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,\ d^4\bar{x} = |\det\Lambda| d^4x = d^4x)$

それゆえ、ローレンツ不変な運動となるために、ラグランジアン密度はローレンツスカラーであるべき．$\mathcal{L}(x) = \bar{\mathcal{L}}(\bar{x})$

また $\bar{S} = S$．あらゆる φ の単関数はローレンツスカラーでかつ、$\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ のように縮約された全ての添字の導関数の積である．(は？)

$\mathcal{L}$ として次を考える．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \Omega_0 \tag{3.9}$$

Ω_0 は任意定数．最小作用の原理から EoM (Euler-Lagrange 方程式) を作る．

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial^\mu\delta\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\delta\varphi - m^2\varphi\delta\varphi \right] \\ &= \int d^4x \left[+\partial^\mu\partial_\mu\varphi - m^2\varphi \right]\delta\varphi \end{aligned} \tag{3.10}$$

表面項は 0．(3.10) は $(-\partial^2 + m^2)\varphi = 0$ の場合にのみ真となる．

K-G eq の解の1つとして平面波がある. $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\pm i\omega t)$, $\mathbf{k}$：任意の実波数ベクトル.

$$\omega = +(\mathbf{k}^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

(無限遠で有限な境界条件を仮定した)一般解は

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + b(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}\right] \tag{3.12}$$

$a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}$ の任意関数. $f(k)$ は $k=|\mathbf{k}|$ の関数で後で都合が良いためいれた.
もし $\varphi(x)$ を波動関数として考えると「負のエネルギー」の矛盾が第2項で現れる.(ダメ)
我々は(3.12)式を実古典場として扱っているが, φ は一般に実ではない.
$\varphi^*(x)=\varphi(x)$ を課すべき.

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathbf{x},t) &= \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} + b^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\right]\\ &= \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} + b^*(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\right]\end{aligned} \tag{3.13}$$

第2項で $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ におきかえた.
$\varphi^*(x)=\varphi(x) \Rightarrow b^*(-\mathbf{k})=a(\mathbf{k})$ なのでこの条件のもと φ を書き直すと

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x},t) &= \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + a^*(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}\right]\\ &= \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}\right]\\ &= \int\frac{d^3k}{f(k)}\left[a(\mathbf{k})e^{ikx} + a^*(\mathbf{k})e^{-ikx}\right]\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる. ここで $kx=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t$ は $x^\mu=(t,\mathbf{x})$ と $k^\mu(\omega,\mathbf{k})$ のローレンツ不変な積.

$$k^2 = k^\mu k_\mu = \mathbf{k}^2-\omega^2 = -m^2 \tag{3.15}$$

(3.15)に従う4元運動量 k^μ はオンシェルと呼ばれる.

$d^3k/f(k)$ をローレンツ不変にする便利を $f(k)$ を選んでいく. orthochronous Lorentz 変換の下で明らかに不変な integration measure は $d^4k\,\delta(k^2+m^2)\,\theta(k^0)$. $\delta(x)$ は Dirac delta, $\theta(x)$ は step function で k^0 は独立な積分変数として扱う.

$$\int_{-\infty}^{\infty}dk^0\,\delta(k^2+m^2)\,\theta(k^0) = \frac{1}{2\omega} \tag{3.16}$$

ここで次を用いた. x_i は零点.

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta(g(x)) = \sum_i\frac{1}{|g'(x_i)|} \tag{3.17}$$

(※ $k^2+m^2=\mathbf{k}^2-(k^0)^2+m^2=\omega^2-(k^0)^2$ よって零点は $k^0=\pm\omega$
$\theta(k^0)$ があるので $k^0>0$ のみ. つまり今の場合は $k^0=\omega$ のみ)

$f(k) \propto \omega$ のとき、$d^3k/f(k)$ がローレンツ不変が見~~ている~~た. $f(k) = (2\pi)^3 2\omega$ とする.

$$\widetilde{dk} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{3.18}$$

よって 次を得る.

$$\varphi(x) = \int \widetilde{dk} \left[a(\mathbb{k}) e^{ikx} + a^*(\mathbb{k}) e^{-ikx} \right] \tag{3.19}$$

逆に $\varphi(x)$ から $a(\mathbb{k})$ を得る公式も作れる.

$$\int d^3x\, e^{-ikx} \varphi(x) = \frac{1}{2\omega} a(\mathbb{k}) + \frac{1}{2\omega} e^{2i\omega t} a^*(-\mathbb{k})$$

$$\int d^3x\, e^{-ikx} \partial_0 \varphi(x) = -\frac{i}{2} a(\mathbb{k}) + \frac{i}{2} e^{2i\omega t} a^*(-\mathbb{k}) \tag{3.20}$$

※ (3.14) の 1行目に $f(k)$ を (3.18) で代入すると

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a(\mathbb{k}) e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x} - i\omega t} + a^*(-\mathbb{k}) e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x} + i\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{2\omega} \left\{ F[a(\mathbb{k})] e^{-i\omega t} + F[a^*(-\mathbb{k})] e^{i\omega t} \right\}$$

よって $\displaystyle \int d^3x\, e^{-ikx} \varphi(x) = e^{i\omega t} \int d^3x\, e^{-i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}} \varphi(x) = e^{i\omega t} F^{-1}[\varphi(x)]$

$$= \frac{1}{2\omega} a(\mathbb{k}) + \frac{1}{2\omega} e^{2i\omega t} a^*(-\mathbb{k})$$

2式目も t で微分した後で F^{-1} すればすぐに出る.

(3.20) から $a^*(-\mathbb{k})$ を消去すれば

$$a(\mathbb{k}) = \int d^3x\, e^{-ikx} \left[i\partial_0 \varphi(x) + \omega \varphi(x) \right]$$

$$= i \int d^3x\, e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi(x) \tag{3.21}$$

ここで $f \overleftrightarrow{\partial_\mu} g \equiv f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f) g$, $\partial_0 \varphi = \partial\varphi/\partial t = \dot{\varphi}$ とする.

$a(\mathbb{k})$ は時間に依存しないことに注意. ((3.21)を見て~、というより、(3.12)の時の決め方から)

ラグランジアンがあるのでハミルトニアンを作れる.
$L(q_i, \dot{q}_i)$ というラグランジアンに対して一般化運動量を $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ とすると
ハミルトニアンHは $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ で得られる.
我々の場合、$\varphi(x, t)$ が $q_i(t)$ の役割にあたる.

$$\Pi(x) = \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} \tag{3.22}$$

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \tag{3.23}$$

$\mathcal{H}$: ハミルトニアン密度. $H = \int d^3x \mathcal{H}$
(3.9) の $\mathcal{L}$ において明らかに

$$\Pi(x) = \dot{\varphi}(x) \tag{3.24}$$

なので

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \Omega_0 \tag{3.25}$$

(3.19) を代入して H を $a(\mathbb{k})$ と $a^*(\mathbb{k})$ で書ける.

$$\begin{aligned}
H = &-\Omega_0 V + \frac{1}{2}\int \widetilde{d\mathbb{k}}\,\widetilde{d\mathbb{k}'}\, d^3x \\
&\quad [\,(-i\omega a(\mathbb{k}) e^{ikx} + i\omega a^*(\mathbb{k}) e^{-ikx})(-i\omega' a(\mathbb{k}') e^{ik'x} + i\omega' a^*(\mathbb{k}') e^{-ik'x}) \\
&\quad + (+i\mathbb{k} a(\mathbb{k}) e^{ikx} - i\mathbb{k} a^*(\mathbb{k}) e^{-ikx}) \cdot (+i\mathbb{k}' a(\mathbb{k}') e^{ik'x} - i\mathbb{k}' a^*(\mathbb{k}') e^{-ik'x}) \\
&\quad + m^2 (a(\mathbb{k}) e^{ikx} + a^*(\mathbb{k}) e^{-ikx})(a(\mathbb{k}') e^{ik'x} + a^*(\mathbb{k}') e^{-ik'x})\,] \\
= &-\Omega_0 V + \frac{1}{2}(2\pi)^3 \int \widetilde{d\mathbb{k}}\,\widetilde{d\mathbb{k}'} \\
&\quad [\,\delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}')(+\omega\omega' + \mathbb{k}\cdot\mathbb{k}' + m^2) \\
&\qquad \times (a^*(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}') e^{+i(\omega-\omega')t} + a(\mathbb{k}) a^*(\mathbb{k}') e^{-i(\omega-\omega')t}) \\
&\quad + \delta^3(\mathbb{k}+\mathbb{k}')(-\omega\omega' - \mathbb{k}\cdot\mathbb{k}' + m^2) \\
&\qquad \times (a(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}') e^{-i(\omega+\omega')t} + a^*(\mathbb{k}) a^*(\mathbb{k}') e^{i(\omega+\omega')t})\,] \\
= &-\Omega_0 V + \frac{1}{2}\int \widetilde{d\mathbb{k}}\, \frac{1}{2\omega} \\
&\quad [\,(+\omega^2 + \mathbb{k}^2 + m^2)(a^*(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}) + a(\mathbb{k}) a^*(\mathbb{k})) \\
&\quad + (-\omega^2 + \mathbb{k}^2 + m^2)(a(\mathbb{k}) a(-\mathbb{k}) e^{-2i\omega t} + a^*(\mathbb{k}) a^*(-\mathbb{k}) e^{2i\omega t})\,] \\
= &-\Omega_0 V + \frac{1}{2}\int \widetilde{d\mathbb{k}}\, \omega\, (a^*(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}) + a(\mathbb{k}) a^*(\mathbb{k}))
\end{aligned} \tag{3.26}$$

2行目の等号で

$$\int d^3x\, e^{i\mathbb{q}\cdot x} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbb{q}) \tag{3.27}$$

を使った. 3番の等号で $\widetilde{d\mathbb{k}'}$ の積分をとった. $\omega = (\mathbb{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ より最後の等号を得る.
また量子力学では積の順序が交換しないかもしれないので、$a(\mathbb{k})$ と $a^*(\mathbb{k})$ の積の順番は計算を通じて変更していない.

No.　　Date

正準量子化を通じて、古典から量子力学へ進む。
↳ q_i や p_i を正準交換関係 $[q_i, q_j]=0$, $[p_i, p_j]=0$, $[q_i, p_j]=i\hbar\delta_{ij}$ を満たす演算子に置き換える。

ハイゼンベルグ描像ではこれらの演算子は同じ時間でとられる。

我々の場合、index は連続無限個の値をとるものなので [$\hbar=1$]

$$[\varphi(x,t), \varphi(x',t)] = 0$$
$$[\Pi(x,t), \Pi(x',t)] = 0$$
$$[\varphi(x,t), \Pi(x',t)] = i\delta^3(x-x') \qquad (3.28)$$

この正準交換関係と (3.21), (3.24) から次を導ける。

$$[a(\mathbb{k}), a(\mathbb{k}')] = 0$$
$$[a^\dagger(\mathbb{k}), a^\dagger(\mathbb{k}')] = 0$$
$$[a(\mathbb{k}), a^\dagger(\mathbb{k}')] = (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}') \qquad (3.29)$$

3.1)
(※ φ が実であることに注意して

$$[a(\mathbb{k}), a(\mathbb{k}')] = \int d\tilde{x}\, e^{-i(k+k')} [i\Pi+\omega\varphi, i\Pi+\omega\varphi] = 0$$

$[a^\dagger(\mathbb{k}), a^\dagger(\mathbb{k}')]$ も同様

$$[a(\mathbb{k}), a^\dagger(\mathbb{k}')] = \int d^3x\, e^{-i(k-k')x} \underbrace{[i\Pi+\omega\varphi, -i\Pi+\omega\varphi]}_{=2i\omega[\Pi,\varphi]=2\omega}$$

$$= 2\omega \int d^3x\, e^{-i(\mathbb{k}-\mathbb{k}')\cdot x} \underset{(3.27)}{=} (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}') \;)$$

ハミルトニアンを書き直す。

$$H = \int \tilde{d\mathbb{k}}\, \omega\, a^\dagger(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}) + (\mathcal{E}_0 - \Omega_0) V \qquad (3.30)$$

ここで
$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}(2\pi)^{-3} \int d^3k\, \omega \qquad (3.31)$$

は単位体積当りの全振動子の全ゼロ点エネルギーである。

(3.31) を $\mathbb{k}$ の全領域で積分すると $\mathcal{E}_0$ の大きさは発散する。紫外線 cutoff Λ までで積分すると

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \qquad (3.32)$$

(※ $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{16\pi^3}\int_{k\leq\Lambda} d^3k \sqrt{k^2+m^2} = \frac{1}{16\pi^3} 4\pi \int_0^\Lambda dk\, k^2 \sqrt{k^2+m^2} \fallingdotseq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\Lambda dk\, |k|^3 = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2}$)

ここで $\Lambda \gg m$ を仮定している。

Ω_0 は任意なので、$\Omega_0 = \mathcal{E}_0$ になるように選べる。

(3.30) は $a(\mathbb{k}) = [(2\pi)^3 2\omega]^{\frac{1}{2}} \tilde{a}(\mathbb{k})$ とすれば (3.6) と同じになる。また (3.4) と (3.29) は等価。
我々は、Klein-Gordon 方程式を EOM とするスカラー場の量子化によって相対論的自由ボソンのハミルトニアンを再構築した。今、パラメータ m は量子論の中の粒子の質量と見れる。(m は長さの逆数の次元だから、粒子の質量は $\hbar m/c$)

フェルミオンの場合は？ → (3.28), (3.29) で反交換関係にすべき
→ (3.26) から (3.30) ではなく、$H = -\Omega_0 V$ (定数) を得る。
→ 反交換関係を使うのは何かしら問題がある。
→ スピン統計定理 (section 4)

次に、ローレンツ不変な相互作用を理論に加えたい。$\varphi(x)$ のあらゆる局所関数がローレンツスカラーであることを踏まえれば簡単。φ^3 や φ^4 などの項を $\mathcal{L}$ に加えれば良い。
しかし、今、粒子間相互作用をとりいれたい。(← 局所的でない)
我々の次の課題はこれらの相互作用の影響を解消することである。

Problems

3.1) 済

3.2)
$$H|k_1 \ldots k_n\rangle = \int \widetilde{dk}\, \omega a^\dagger(\mathbb{k}) a(\mathbb{k}) a^\dagger(\mathbb{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbb{k}_n)|0\rangle$$
$$= \int \widetilde{dk}\, \omega a^\dagger(\mathbb{k}) a^\dagger(\mathbb{k}_1) a(\mathbb{k}) a^\dagger(\mathbb{k}_2) \cdots a^\dagger(\mathbb{k}_n)|0\rangle$$
$$+ \int \widetilde{dk}\, \omega a^\dagger(\mathbb{k}) (2\pi)^3 2\omega\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)\, a^\dagger(\mathbb{k}_2) \cdots a^\dagger(\mathbb{k}_n)|0\rangle$$
$$= a^\dagger(\mathbb{k}_1) H|k_2 \cdots k_n\rangle + \omega_1 |k_1 \cdots k_n\rangle$$
$$= \cdots = (\omega_1 + \cdots + \omega_n)|k_1 \cdots k_n\rangle + a^\dagger(\mathbb{k}_1)\cdots a^\dagger(\mathbb{k}_n) \underbrace{H|0\rangle}_{a(\mathbb{k})|0\rangle = 0}$$
$$\therefore\ H|k_1 \ldots k_n\rangle = (\omega_1 + \cdots + \omega_n)|k_1 \ldots k_n\rangle \qquad (\because\ \omega_i = (\mathbb{k}_i^2 + m^2)^{\frac{1}{2}})$$