Srednicki

§25 Unstable particles and reasonances

藤木 恒成

§ 25 Unstable particles and reasonances

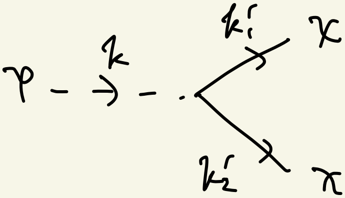
two real scalar field

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m_\varphi^2 \varphi^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2$$
$$+ \frac{1}{2} g \varphi \chi^2 + \frac{1}{6} h \varphi^3$$

($d=6$ で $[\mathcal{L}]=6$, $[\varphi]=[\chi]=2$, $[g]=[h]=0$
coupling const が dimless なので renormalizable)

$m_\varphi > 2m_\chi$ のとき $k=(m_\varphi, 0)$ で decay について見ていく

$\varphi\chi^2$ vertex



Z_g のくり込み条件として

$$V_3(k, k_1', k_2') = g \quad (\text{at } k^2 = -m_\varphi^2,\ k_1'^2 = k_2'^2 = -m_\chi^2)$$

このとき scattering matrix element

$$T = g \quad (\text{at } k^2 = -m_\varphi^2,\ k_1'^2 = k_2'^2 = -m_\chi^2)$$

(11.48) より

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\varphi}\, dLIPS_2\, |T|^2$$

(11.23) より

$$dLIPS_2 \equiv (2\pi)^6 \delta^6(k_1' + k_2' - k)\, \widetilde{dk_1'}\, \widetilde{dk_2'}$$

(11.21) より

$$\widetilde{dk} = \frac{d^5\bar{k}}{(2\pi)^5\, 2\omega} = \frac{d^6k}{(2\pi)^6} 2\pi \delta(k^2 + m_\chi^2)\, \theta(k^0)$$

(L.T. invariant)

よって

$$dLIPS_2 = (2\pi)^6 \delta^6(k_1' + k_2' - k) \frac{d^5k_1'}{(2\pi)^5\, 2k_1'^0} \frac{d^5k_2'}{(2\pi)^5\, 2k_2'^0}$$

$$= \frac{d^5k_1'\, d^5k_2'}{4(2\pi)^4 k_1'^0 k_2'^0} \delta(k_1'^0 + k_2'^0 - m_\varphi)\, \delta^5(\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2' - \mathbf{0})$$

$$= \frac{|\mathbf{k}_1'|^4\, d\Omega\, d|\mathbf{k}_1'|}{4(2\pi)^4 \left(\frac{m_\varphi}{2}\right)^2} \delta(k_1'^0 + k_2'^0 - m_\varphi)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \mathbf{k}_1' = -\mathbf{k}_2' \text{ より } k_1'^0 = \sqrt{|\mathbf{k}_1'|^2 + m_\chi^2} = \sqrt{|\mathbf{k}_2'|^2 + m_\chi^2} = k_2'^0 \\ k_1'^0 + k_2'^0 - m_\varphi = 0 \text{ より } k_1'^0 = k_2'^0 = \frac{m_\varphi}{2} \end{array} \right)$$

$$= \frac{|\mathbf{k}_1'|^3\, d\Omega}{4(2\pi)^4 m_\varphi}$$

$$\left(\because\ \delta(k_1'^0 + k_2'^0 - m_\varphi) = \delta\left(2\sqrt{|\mathbf{k}_1'|^2 + m_\chi^2} - m_\varphi\right) = \frac{\sqrt{|\mathbf{k}_1'|^2 + m_\chi^2}}{2|\mathbf{k}_1'|} \delta\left(|\mathbf{k}_1'| - \frac{1}{2}(m_\varphi^2 - 4m_\chi^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

(14.23)より $\int d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}$ であることを考慮して

$$\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m_\varphi}\int dLIPS_2\, |T|^2$$

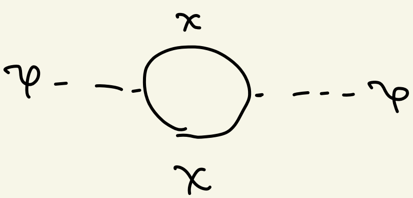
S factor

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m_\varphi}\cdot\frac{|k_1^r|^3}{4(2\pi)^4 m_\varphi}\,\frac{8}{3}\pi^2 g^2$$

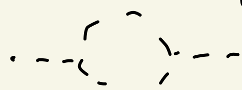
$$= \frac{1}{12}\pi\alpha\left(1-\frac{4m_\chi^2}{m_\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}} m_\varphi \qquad \left(\alpha\equiv\frac{g^2}{(2\pi)^3}\right)$$

⇒ incoming particleが不安定なので
LSZ reduction formulaを使うのは不適切!?

φのprop.に対する1-loop correctionを計算



(h<<gとして以下のdiagramは無視)



§14の議論から

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln D - A'k^2 - B'm_\varphi^2$$

$$D = x(1-x)k^2 + m_\chi^2 - i\epsilon$$

cf) (14.40), (14.14)

くり込み条件 $\Pi(-m_\varphi^2)=0$, $\Pi'(-m_\varphi^2)=0$ としたいが

$k^2=-m_\varphi^2$, $m_\varphi>2m_\chi$ で $D<0$ となる x が存在 ⇒ 虚部

A', B' は real なので cancel できない

⇒ くり込み条件 $\mathrm{Re}\,\Pi(-m_\varphi^2)=0$, $\mathrm{Re}\,\Pi'(-m_\varphi^2)=0$

① $\Pi'(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\{x(1-x)\ln D+x(1-x)\}-A'$

$$\mathrm{Re}\,\Pi'(-m_\varphi^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln|D_0|+\frac{\alpha}{12}-A'=0$$

$$(\because \ln(-|D_0|)=\ln|D_0|+(2n+1)\pi i)$$

$$\therefore A'=\frac{\alpha}{12}+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\;x(1-x)\ln|D_0|$$

② $\Pi(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\,D\ln(D/|D_0|)$

$$+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\;m_\chi^2\ln|D_0|-\frac{\alpha}{12}k^2-B'm_\varphi^2$$

$$\mathrm{Re}\,\Pi(-m_\varphi^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\;m_\chi^2\ln|D_0|+\frac{\alpha}{12}m_\varphi^2-B'm_\varphi^2$$

$$\therefore B'm_\varphi^2=\frac{\alpha}{12}m_\varphi^2+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\;m_\chi^2\ln|D_0|$$

よって $\Pi(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\,D\ln(D/|D_0|)-\frac{1}{12}\alpha(k^2+m_\varphi^2)$

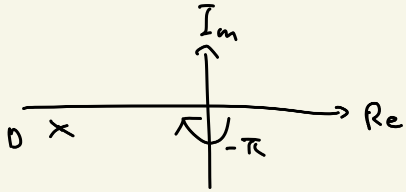
$$D_0=-x(1-x)m_\varphi^2+m_\chi^2$$

$k^2 < -4m_\chi^2$ のとき

$D = -k^2x^2 + k^2 x + m_\chi^2 < 0$ で虚部あり

$x_- < x < x_+ \quad , x_\pm = \frac{1}{2} \pm \left(1 + \frac{4m_\chi^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$D = x(1-x)k^2 + m_\chi^2 - i\varepsilon$ より $\mathrm{Im} \ln D = -\pi$



$$\mathrm{Im}\,\Pi(k^2) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{2}\alpha \int_{x_-}^{x_+} dx\, D(\ln|D| - \pi i) - \frac{1}{12}\alpha(k^2 + m_\varphi^2) \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\alpha \int_{x_-}^{x_+} dx\, D$$

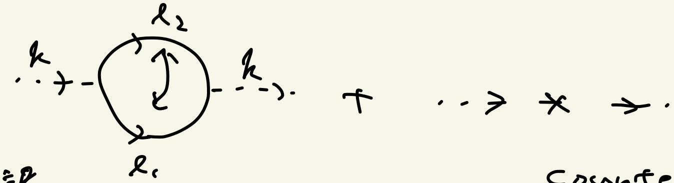
$$= -\frac{1}{2}\pi\alpha(-k^2) \int_{x_-}^{x_+} (x - x_+)(x - x_-)$$

$$= -\frac{1}{12}\pi\alpha\left(1 + \frac{4m_\chi^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}} k^2$$

$$\mathrm{Im}\,\Pi(-m_\varphi^2) = -\frac{1}{12}\pi\alpha\left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}} m_\varphi^2$$

(25.9)と比較して $\boxed{\mathrm{Im}\,\Pi(-m_\varphi^2) = m_\varphi \Gamma}$

① 具体的なdiagramの積分はしない



翻訳

$$i\Pi(k^2) = \overbrace{\frac{1}{i}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{S\text{ factor}}\cdot\underbrace{(ig)^2}_{\text{vertex}}\underbrace{\left(\frac{1}{i}\right)^2}_{\text{prop.}}}^{=-\frac{1}{2}ig^2}\times$$

$$\int \boxed{\frac{d^6l_1}{(2\pi)^6}\frac{d^6l_2}{(2\pi)^6}(2\pi)^6\,\delta^6(l_1+l_2-k)}\;\frac{1}{l_1^2+m_\chi^2-i\varepsilon}\;\frac{1}{l_2^2+m_\chi^2-i\varepsilon}$$

$$-\left(Ak^2+Bm_\varphi^2\right)$$

(5.91)の公式 $\frac{1}{x-i\varepsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$ を用いて

$$\mathrm{Im}\,\Pi(k^2) = \mathrm{Im}\left\{-\frac{i}{2}g^2\int \square \left(\underbrace{P\frac{1}{l_1^2+m_\chi^2}}_{\equiv P_1} + i\pi\underbrace{\delta(l_1^2+m_\chi^2)}_{\equiv\delta_1}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\underbrace{P\frac{1}{l_2^2+m_\chi^2}}_{\equiv P_2} + i\pi\underbrace{\delta(l_2^2+m_\chi^2)}_{\equiv\delta_2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}g^2\int \square\left(P_1P_2 - \pi^2\delta_1\delta_2\right) \qquad \text{—— ①}$$

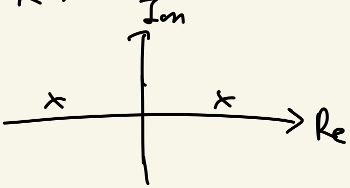
Δ_{ret} について

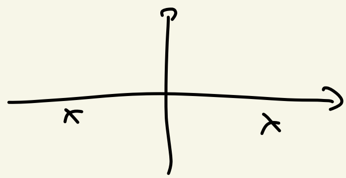
$$\Delta_{ret}(x-y) = \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m_\chi^2+is\varepsilon} \qquad (s\equiv \mathrm{sign}(k^0))$$

$$= \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{-k^{0\,2}+|\mathbf{k}|^2+m_\chi^2+is\varepsilon}$$

$$= -\left(k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m_\chi^2-is\varepsilon}\right)\left(k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m_\chi^2+is\varepsilon}\right)$$

$k^0>0$ $\qquad\qquad\qquad$ $k^0<0$





$\Rightarrow x^0\le y^0$ でのみ nonzero

Δ_{adv} について

同様に $\Delta_{adv}=\int \frac{d^6k}{(2\pi)^6}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m_\chi^2-is\varepsilon}$ とすると

$x^0\ge y^0$ でのみ nonzero

ここで $\int (P_1P_2+\pi^2 s_1s_2\delta_1\delta_2)$

$$=\mathrm{Re}\left\{(P_1-i\pi s_1\delta_1)(P_2+i\pi s_2\delta_2)\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{k^2+m_\chi^2+is_1\varepsilon}\,\frac{1}{k^2+m_\chi^2-is_2\varepsilon}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left(\underbrace{\tilde\Delta_{ret}(k^2)}_{x^0\ge y^0\text{ で }0}\ \underbrace{\Delta_{adv}(k^2)}_{x^0\le y^0\text{ で }0}\right)=0 \qquad \text{— ②}$$

$$\mathrm{Im}\,\pi(k^2) = ① - \left(-\frac{1}{2}g^2\right) \times \underbrace{②}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2}g^2\pi^2 \int \boxed{} \underbrace{(1+S_1 S_2)}_{} \delta_1 \delta_2$$

$$= \begin{cases} 0 & (\mathrm{sign}(l_1^0) \neq \mathrm{sign}(l_2^0)) \\ 2 & (\quad " \quad = \quad " \quad) \end{cases}$$

$l_1^0 + l_2^0 = k^0 = m_\varphi$ より l_1^0, l_2^0 がともに正で nonzero

$$= \frac{1}{4}g^2\pi^2 \int \boxed{} \; 2\pi\delta(l_1^2+m_\chi^2)\theta(l_1^0)\, 2\pi\delta(l_2^2+m_\chi^2)\theta(l_2^0)$$

$$= \frac{1}{4}\int d\mathrm{LIPS}_2 |T|^2$$

(25.8), (25.23) とと比較して. $\boxed{\mathrm{Im}\,\pi(-m_\varphi^2) = m_\varphi \Gamma}$

→ Cutkosky rules として一般化

② 物理的に考察

QM から

散乱振幅 $f_l(E) \sim \dfrac{1}{E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma}$

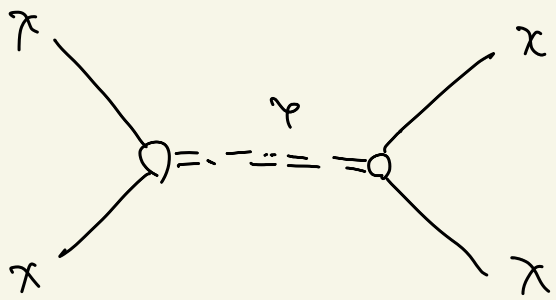
$$\psi(t) \sim \int dE \; \frac{1}{E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma} \underbrace{\tilde{\psi}(E)\, e^{-iEt}}_{\text{波束}}$$

$$\sim e^{-iE_0 - \frac{\Gamma}{2}t}$$

$(\because E \sim E_0 - \frac{i}{2}\Gamma$ で寄与大$)$

よって $|\psi(t)|^2 \sim e^{-\Gamma t}$ $\Rightarrow$ $\Gamma = \frac{1}{\tau}$

φを経由したχχ scattering



$s \simeq m_\varphi^2$ のとき s-channel の寄与(大)

$$T \simeq \frac{g^2}{-s+m_\varphi^2-\Pi(-s)}$$ cf) (20.1) (5.2)

$s=(m_\varphi+\varepsilon)^2 \simeq m_\varphi^2+2m_\varphi\varepsilon$ とすると

(εは incoming 粒子の energy)

(25.27)(25.28) より

$$T \simeq \frac{-g^2/2m_\varphi}{\varepsilon + \Pi(-m_\varphi^2)/2m_\varphi}$$

くり込み条件から $\mathrm{Re}\,\Pi(-m_\varphi^2)=0$ より

$$(\text{分母}) = \varepsilon + i\,\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(-m_\varphi^2)}{2m_\varphi}$$

QM (25.25) と比較して $\Gamma = \dfrac{\mathrm{Im}\,\Pi(-m_\varphi^2)}{m_\varphi}$