$$= -\int d^3x\, \widetilde{dk_1}\, \widetilde{dk_2}\, k_1^0 k_2^j \Big\{ e^{i(k_1+k_2)x} a(k_1)a(k_2)$$

$$+ e^{-i(k_1+k_2)x} a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2) - e^{i(k_1-k_2)x} a(k_1)a^\dagger(k_2)$$

$$- e^{-i(k_1-k_2)x} a^\dagger(k_1)a(k_2) \Big\}$$

少し雑に…

$$= -\int \widetilde{dk_1}\, \widetilde{dk_2}\, k_1^0 k_2^j (2\pi)^3 \Big\{ \underbrace{\delta^3(k_1+k_2)}_{0} a(k_1)a(k_2)$$

$$+ \underbrace{\delta^3(k_1+k_2)}_{0} a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2) - \delta^3(k_1-k_2)\left(a(k_1)a^\dagger(k_2) + a(k_2)a^\dagger(k_1)\right) \Big\}$$

$$= -\int \widetilde{dk} \frac{(2\pi)^3 k^0}{(2\pi)^3 k^0} \cdot \frac{k^j}{2} \cdot -2\, a^\dagger(k)\, a(k)$$

$$= \int \widetilde{dk}\, k^j\, a_a^\dagger(k)\, a_a(k) \qquad (22.34)$$

これは期待していた通りの形式であり，

エネルギー・運動量4元ベクトル は次のように書ける
energy-momentum four-vector

$$P^{\mu} = \int d^3x\, T^{0\mu}(x) \qquad (22.35)$$

§2で時空並進演算子は次のように定義された

$$T_a \equiv \exp(-i P^{\mu} a_{\mu}) \qquad (22.36)$$

cf. (2.23)

これは

$$T^{-1}(a)\, \varphi_a(x)\, T(a) = \varphi_a(x-a) \qquad (22.37)$$

を満たす

これは次のように変形できる

$$\varphi_a T(a) = T(a)\, \varphi_a(x-a)$$

a_{μ}を微小とすれば

$$\varphi_a T(a) = T_a \varphi_a - T_a \partial^{\mu} \varphi_a a_{\mu}$$

また、 $T(a) = \exp(-i P^{\mu} a_{\mu}) \simeq 1 - i P^{\mu} a_{\mu}$

とできるから

$$\varphi_a (1 - i P^{\mu} a_{\mu}) = (1 - i P^{\mu} a_{\mu}) \varphi_a - (1 - i P^{\mu} a_{\mu}) \partial^{\nu} \varphi_a a_{\nu}$$

2次の微小項を無視して整理

$$-i \varphi_a P^{\mu} a_{\mu} = -i P^{\mu} a_{\mu} \varphi_a - \partial^{\mu} \varphi_a a_{\mu}$$

$$\varphi_a P^{\mu} a_{\mu} - P^{\mu} \varphi_a a_{\mu} = \frac{1}{i} \partial^{\mu} \varphi_a a_{\mu}$$

$$\therefore \ [\varphi_a, P^{\mu}] = \frac{1}{i} \partial^{\mu} \varphi_a \qquad (22.38)$$

これは標準的な交換関係を用いることで確認することもできる

$$\varphi_a P^{\mu} - P^{\mu} \varphi_a = -\int d^3x' \, \varphi_a(x) \Pi(x') \partial^{\mu} \varphi_a(x') - \Pi(x') \partial^{\mu} \varphi_a(x') \varphi_a(x)$$

(3.28) $[\varphi(x), \Pi(x')] = i\delta^3(x-x')$

を用いれば

$$= \int d^3x' \Big[\Pi(x') \Big(\partial^\mu \varphi_a(x') \varphi_a(x) - \varphi_a(x) \partial^\mu (x') \Big) - i\,\delta^3(x-x')\,\partial^\mu \varphi_a(x') \Big]$$

$$= -i\,\partial^\mu \varphi_a(x)$$

$$= \frac{1}{i}\,\partial^\mu \varphi_a(x) \iff (22.38)$$

- 次にローレンツ変換について調べる

微小ローレンツ変換を

$\varphi_a(x) \to \varphi_a(x + \delta\omega \cdot x)$ で表す

ただし、

$\delta\omega$ は $\delta\omega^{\nu}$
x は ${}_{\rho}x^{\rho}$ の略記

これは時空並進変換と大変類似しているが
唯一の相違は、変換パラメータが
xに依存している点である。

その結果生じる保存カレントは

$$M^{\mu\nu\rho}(x) = x^{\nu}T^{\mu\rho}(x) - x^{\rho}T^{\mu\nu}(x)$$
(22.39)

これは、$\partial_{\mu} M^{\mu\nu\rho}(x) = 0$ を満たす

$M^{\mu\nu\rho}(x)$ は $\nu \leftrightarrow \rho$ の交換で反対称

であるが、これは$\delta\omega^{\nu\rho}$が $\nu \leftrightarrow \rho$の交換について
反対称であることに由来する。

このカレントに対応する保存量は

$$M^{\nu\rho} = \int d^3x \quad M^{0\nu\rho}(x)$$
(22.40) であり

ローレンツ群の生成子となる。((2.12)で導入した)

正準交換関係を用いれば$M^{\nu\rho}$に関する交換関係が求まる

たとえば、

$$[\varphi(x), M^{\mu\nu}] = \mathcal{L}^{\mu\nu}\varphi(x) \qquad (2.29)$$

について

$$\begin{aligned}
&[\varphi(x), M^{\mu\nu}] \\
&= [\varphi(x), \int dx' M^{0\mu\nu}(x')] \\
&= [\varphi(x), M^{0\mu\nu}(x)] \\
&= [\varphi(x), x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}] \\
&= [\varphi(x), -x^\mu \pi_a \partial^\nu \varphi + x^\nu \pi_a \partial^\mu \varphi] \\
&= -i x^\mu \partial^\nu \varphi + i x^\nu \partial^\mu \varphi \\
&= \frac{1}{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\varphi
\end{aligned}$$

とすれば、同様の交換関係を満たすことが分かる。