Srednicki §22 / 連続的対称性と保存カレント

担当：林

- ラグランジアンの形式から、ネーターカレントとネーターチャージの表式を得る
- 系の対称性について、保存量と保存カレントが現れることを実際に確認し、それに関連する様々な性質を理解する。

$$\begin{cases} \text{スカラー場のセット} & \varphi_a(x) \\ \text{ラグランジアン密度} & \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)) \end{cases}$$

各場の微小変換 $\varphi_a \to \varphi_a + \delta\varphi_a$ について

$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ とする

（但し、$(\delta\mathcal{L})$ はチェインルールで与えられる）

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)}\delta\varphi_a(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(x))}\partial_\mu\delta\varphi_a(x) \tag{22.1}$$

作用原理より

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} = 0$$

(S は action , $\frac{\delta}{\delta \varphi_a}$ は関数微分)

すなわち

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a} = \int d^4y \, \frac{\delta \mathcal{L}(y)}{\delta \varphi_a(x)}$$

$\mathcal{L} = -\partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi$.

$$= \int d^4y \left[\frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\delta \varphi_b(y)}{\delta \varphi_a(x)} + \frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu \varphi_b(y))} \frac{\delta(\partial_\mu \varphi_b(y))}{\delta \varphi_a(x)} \right]$$

$$= \int d^4y \left[\frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial \varphi_b(y)} \delta_{ba} \delta^4(y-x) + \frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu \varphi_b(y))} \delta_{ba} \partial_\mu \delta^4(y-x) \right]$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))}$$

これを用いて

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi_a(x)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))} + \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)}$$

(22.1)に代入して

$$\boxed{\delta \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \Big(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))} \delta \varphi_a(x)}_{\star} \Big) + \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \delta \varphi_a(x)} \quad (22.5)$$

Def. ネーターカレント $= j^\mu(x)$ (22.6)

すなわち

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \underbrace{\delta \mathcal{L}(x)}_{0} - \underbrace{\frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \delta \varphi_a(x)}_{\star} \quad (22.7)$$

(ラグランジアンが不変ならゼロ)

古典場の方程式が満たされるなら消える

変分のとり方などでもどってはいない。

$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a}$ と略記しているにすぎない…。

● ラグランジアンを不変にする微小座標変換が与えられるならば、
ネーターカレントは特別な意味をもつ。

$\delta L = 0$, かつラグランジアンが連続的な対称性を持つ場合,

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

が常に成り立つ

「ネーターカレントは保存する」という

$$j^\mu = \begin{bmatrix} j^0 \\ \boldsymbol{j} \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} j^0(x) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(x) = 0$$

$$\partial_\mu = \begin{bmatrix} \partial_0 \\ \nabla \end{bmatrix}.$$

(22.8)

$$\partial^\mu = \begin{bmatrix} -\partial_0 \\ \nabla \end{bmatrix}$$

ここで、 $j^0(x) \longleftrightarrow$ 保存量密度

$\boldsymbol{j}(x) \longleftrightarrow$ 保存カレント

と解釈できる

すると、(22.8) は局所的な保存則を表す.
(連続の方程式)

〈例〉

ある複素スカラー場について、ラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (22.9)$$

で与えられるとする。

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

と実スカラー場 φ_1, φ_2 でかけば、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

- φ に $U(1)$ 変換

$$\boxed{U(1) = e^{i\theta} \ (\theta \in \mathbb{R})}$$

$$\varphi \to e^{-i\alpha}\varphi \quad (22.11) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

を行う。

このとき、(22.9) の $\mathcal{L}$ は不変である

また、φ_1, φ_2 について以下が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (22.12)$$