

Perturbation theory to all orders

京都大学理学部 4 回生 篠田遼太郎

2023 年 6 月 24 日

前章の結果を再確認する。

くりこみ可能性

Lagrangian の係数が全て、質量の非負の次元を持っていれば繰り込み可能。すなわち

$$[g_n] \geq 0 \quad (1)$$

であれば良い。c.f. 作用は無次元量なので、ラグランジアン密度は $[\mathcal{L}] = -4$ である。

この章では、6 次元の ϕ^3 theory の場合に、結合定数 g の高次の項までが含まれる場合に、散乱振幅をどのように求めるかということを見る。まず、one-particle irreducible diagram (以下 1P.I. と略す) について復習する。2 本 external line のある 1P.I. 全ての和を $\Pi(-m^2)$ と定義した。3 本以上ある場合は、1P.I. の全ての和を $\mathbf{V}_n(k_1, \dots, k_n)$ と定義した。くりこみ摂動論を考えると、Lagrangian に現れる counter term は以下のくりこみ条件から決定される。

くりこみ条件

counter term Z_ϕ, Z_m, Z_g は、以下のくりこみ条件

$$\begin{aligned} \Pi(-m^2) &= 0 \\ \Pi'(-m^2) &= 0 \\ \mathbf{V}_3(0, 0, 0) &= g \end{aligned} \quad (2)$$

が g の任意のオーダーについて成り立つという条件から決定される。

これらの条件は物理的には、粒子の質量が m であること、プロパゲーターの $k^2 = m^2$ における留数が 1 であることに対応している。

この節では、くりこみ摂動論を結合定数の任意の高次の寄与まで含めて行う方法を紹介する。まず、 n -point vertex function $\mathbf{V}_n(k_1, \dots, k_n)$ を求める。ここで $4 \geq n \geq E$ とする。ただし、 E は着目する過程における外線の本数である。これを以下の、skelton expansion を用いて計算する。skelton expansion の具体例として、以下の図 1 に 4 点相関の場合を載せる。

skelton expansion

n 点相関を表す、全ての 1P.I. ダイアグラムを描く。ただし、propagator や 3-point vertex を下部構造として持っているものは除く。

このようにして得られた各ダイアグラムを skelton diagram と呼ぶ。

\mathbf{V}_n を得るには、各 skelton diagram に Feynman rule を当てはめる。

次に、tree level のダイアグラムを書いて、internal line には exact propagator を、vertex には \mathbf{V}_n を当てはめる。図 2 に、この操作の具体例を載せる。

まとめ

skelton expansion を用いて、 \mathbf{V}_n を計算。

tree level のダイアグラムを書いて、internal line には exact propagator を、vertex には \mathbf{V}_n を当てはめる。

これにより、 g 任意に高次のオーダーまで考慮した散乱振幅を求めることができる。