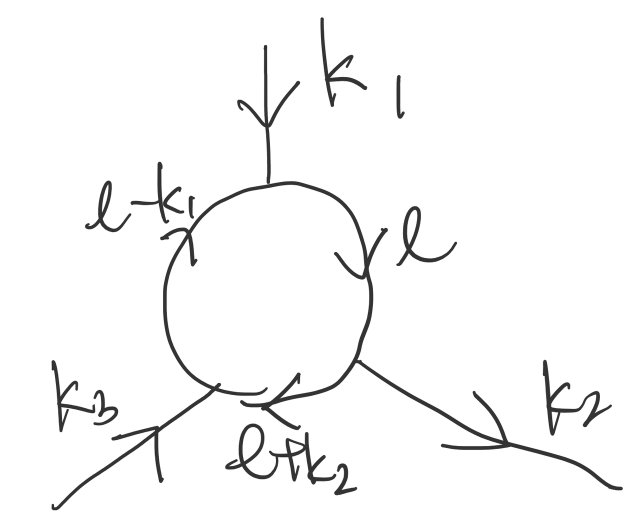
16章　2023年6月7日 水曜日　10:29

担当: 鷲原泰輝

Loop Corrections to the vertex

目標

φ^3 vertex を補正する $O(g^3)$ のダイアグラムを考え、その値を評価する。



exact な3点頂点関数 $iV_3(k_1,k_2,k_3)$ に対する $O(g^3)$ の補正項を考える。$iV_3(k_1,k_2,k_3)$ は運動量 k_1,k_2,k_3 を運ぶ3つの外線を含む1粒子既約図の合計で、運動量保存から $k_1+k_2+k_3=0$ である。元の頂点 $iZ_g g$ はこの和の第1項であり、ループを含む図が第2項である。したがって

$$iV_3(k_1,k_2,k_3) = iZ_g g + (ig)^3\left(\frac{1}{i}\right)^3\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\tilde{\Delta}((l-k_1)^2)\tilde{\Delta}((l+k_2)^2)\tilde{\Delta}(l^2) + O(g^5) \quad (16,1)$$

となる。第2項では、$Z_g=1+O(g^2)$ とした。14章で使った技法を使ってこの積分を評価する。

ファイマンの公式から、次のようになる

$$\tilde{\Delta}((l-k_1)^2)\tilde{\Delta}((l+k_2)^2)\tilde{\Delta}(l^2) = \int dF_3\left[x_1(l-k_1)^2+x_2(l+k_2)^2+x_3l^3+m^2\right]^{-3} \quad (16,2)$$

ここで $\int dF_3 = 2\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\,\delta(x_1+x_2+x_3-1)$　(16,3)

である。(16,2) 式の右辺を変形して

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}((l-k_1)^2)\tilde{\Delta}((l+k_2)^2)\tilde{\Delta}(l^2) &= \int dF_3\left[l^2-2l\cdot(x_1k_1-x_2k_2)+x_1k_1^2+x_2k_2^2+m^2\right]^{-3}\\
&= \int dF_3\left[(l-x_1k_1+x_2k_2)^2+x_1(1-x_1)k_1^2+x_2(1-x_2)k_2^2+2x_1x_2k_1k_2+m^2\right]^{-3}\\
&= \int dF_3\left[q^2+D\right]^{3} \quad (16,4)
\end{aligned}$$

ここで、$q\equiv l-x_1k_1+x_2k_2$ とし、

$$\begin{aligned}
D &\equiv x_1(1-x_1)k_1^2+x_2(1-x_2)k_2^2+2x_1x_2k_1\cdot k_2+m^2\\
&= x_3x_1k_1^2+x_3x_2k_2^2+x_1x_2k_3^2+m^2 \quad (16,5)
\end{aligned}$$

とした。ただし、$k_3^2=(k_1+k_2)^2$, $x_1+x_2+x_3=1$ を使った。
14章でやったような積分経路をとることで、

$$V_3(k_1,k_2,k_3)/g = Z_g + g^2\int dF_3\int\frac{d^d\bar{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\bar{q}^2+D)^3} + O(g^4) \quad (16,6)$$

$\bar{q}$ はユークリッドベクトルである。この積分は $d\geq 6$ で発散する。
そこで、14章の一般式を用いて $d<6$ として評価する。
(14,27) 式で、$a=0$, $b=3$ とすることで、

$$\begin{aligned}
\int\frac{d^d\bar{q}}{(2\pi)^d} &= \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3)\Gamma(\frac{d}{2})}D^{-(3-d/2)}\\
&= \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}}D^{-(3-d/2)} \quad (16,7)
\end{aligned}$$

となる。今、$d=6-\varepsilon$ とおく。g を無次元化するために次のように置きかえる。$g\to g\tilde{\mu}^{\varepsilon/2}$ とおくと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
V_3(k_1,k_2,k_3)/g &= Z_g + g^2\tilde{\mu}^{\varepsilon}\int dF_3\frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{2(4\pi)^{3-\varepsilon/2}}D^{-\varepsilon/2} + O(g^4)\\
&= Z_g + \frac{1}{2}\alpha\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\int dF_3\left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D}\right)^{\varepsilon/2} + O(\alpha^2) \quad (16,8)
\end{aligned}$$

ここで $\alpha=\frac{g^2}{(4\pi)^3}$ とした。
$\varepsilon\to 0$ の極限をとると、$\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})\to\frac{2}{\varepsilon}$ かつ $A^{\varepsilon/2}\to 1+\frac{\varepsilon}{2}\ln A+O(\varepsilon^2)$ で、$\int dF_3=1$ なので、

$$V_3(k_1,k_2,k_3)/g = Z_g + \frac{\alpha}{2}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\int dF_3\ln\left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^{\gamma}D}\right)\right] + O(\alpha^2) \quad (16,9)$$

となる。$\mu^2=4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2$ として、$Z_g=1+C$ とおくと、

$$\begin{aligned}
V_3(k_1,k_2,k_3)/g &= 1+C+\frac{\alpha}{\varepsilon}+\frac{\alpha}{2}\int dF_3\ln\left(\frac{\mu^2}{D}\right)+O(\alpha^2)\\
&= 1+\left\{\alpha\left[\frac{1}{\varepsilon}+\ln(\mu/m)\right]+C\right\}-\frac{\alpha}{2}\int dF_3\ln(D/m^2) + O(\alpha 2) \quad (16,11)
\end{aligned}$$

となる。

Cが次のような形とする。

$$C = -\alpha\left[\frac{1}{\varepsilon}+\ln(\mu/m)+\kappa_C\right]+O(\alpha^2) \quad (16,12)$$

ここで κ_C は純粋に数値的な定数である。このとき、

$$V_3(k_1,k_2,k_3)/g = 1-\frac{\alpha}{2}\int dF_3\ln(D/m^2)-\kappa_C\alpha+O(\alpha^2) \quad (16,13)$$

となる。よって、このCの選択により、$V_3(k_1,k_2,k_3)$ が有限となり、最終的に μ から独立となる。

ここで、$\Pi(-m^2)=0$, $\Pi'(-m^2)=0$ に類似した κ_C を決める条件が必要になる。$\Pi(k^2)$ に関する条件は、頂点については直接比較できるものではない。これは、g を測定するには g に依存する断面積を測定することになるからである。これらの断面積も κ_C に依存するので、計算と実験を比較するときに、κ_C の値は自由に決めることができる。$\kappa_C=0$ とするのが最も便利。これは、

$$V_3(0,0,0)=g \quad (16,14)$$

という条件に対応している。

(16,13)式のファイマンパラメーターに対する積分は、閉じていて行うことができないが、$|k^2|\gg m^2$ の場合は容易に評価できる。

$$V_3(k_1,k_2,k_3)/g \simeq 1-\frac{1}{2}\alpha\left[\ln(k^2/m^2)+O(1)\right]+O(\alpha^2) \quad (16,15)$$

$|k^2|\gg m^2$ のとき、頂点関数の1ループ補正の大きさは、$|k^2|$ の対数的に増加する。これは14章でみた、$\Pi(k^2)/(k^2+m^2)$ と同じふるまいである。