§15

目標：13章，14章で求めたプロパゲーター $\tilde{\Delta}(k^2)$ を見比べる。

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s)\, \frac{1}{k^2+s-i\varepsilon} \qquad (\S 13) \quad \cdots ①$$

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon-\Pi(k^2)} \qquad (\S 14) \quad \cdots ②$$

ただし、6次元 φ^3 理論で、$O(g^2)$ の程度で、

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx\, D \log\left(\frac{D}{D_0}\right) - \frac{1}{12}\alpha(k^2+m^2) + O(\alpha^2) \quad \cdots ③$$

ここで、

$$\alpha \equiv \frac{g^2}{(4\pi)^3}, \quad D = x(1-x)k^2+m^2-i\varepsilon, \quad D_0 = [1-x(1-x)]m^2$$

①と②の虚部を比較することを考える。

$$\frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} + \frac{i\varepsilon}{x+\varepsilon^2} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x), \quad k^2>0, \quad m^2>0 \text{ から、}$$

①を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\tilde{\Delta}(k^2) &= \pi\delta(k^2+m^2) + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s)\, \pi\delta(k^2+s) \\ &= \pi\delta(k^2+m^2) + \rho(-k^2) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

ここで、$\rho(s) \equiv 0 \quad (s<4m^2)$ としている。

これより

$$\pi\rho(s) = \mathrm{Im}\,\tilde{\Delta}(-s) \qquad (s \geqq 4m^2)$$

次に $\mathrm{Im}(k^2)=0$ を仮定して、②を用いると、

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\Delta}(k^2) = \pi\delta(k^2+m^2-\Pi(k^2)) \qquad (\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)=0)$$

ここで、$\Pi(-m^2)=0$，$\Pi'(-m^2)=0$ から、

$$(x+m^2-\Pi(x))\big|_{x=-m^2}=0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+m^2-\Pi(x))\big|_{x=-m^2}=1 \ (\neq 0) \text{ より}$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\Delta}(k^2) = \pi\delta(k^2+m^2) \qquad (\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)=0)$$

一方、$\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)\neq 0$ を仮定すると、②式において $i\varepsilon=0$ として良く、
その時、

$$\mathrm{Im}\,\hat{\Delta}(k^2) = \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)}{(k^2+m^2-\mathrm{Re}\,\Pi(k^2))^2+(\mathrm{Im}\,\Pi(k^2))^2} \qquad (\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)\neq 0)$$

④と見比べて

$$\pi\rho(s) = \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(-s)}{(-s+m^2-\mathrm{Re}\,\Pi(-s))^2+(\mathrm{Im}\,\Pi(-s))^2}$$

$s<4m^2$ で $\rho(s)=0$ から $s<4m^2$ で ~~Im~~ $\mathrm{Im}\,\Pi(-s)=0$
すなわち ~~Im~~ $\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)=0 \quad (k^2>-4m^2)$
これは $O(\alpha)$ の程度で14章で見た結果と一致する。

ここでの結果は③式の被積分関数を見ても分かる。
$x(1-x)k^2>-m^2 \iff D>0$ と $x(1-x)$ の最大値が $\frac{1}{4}$ なことから、
$k^2>-4m^2$ ならば $0\leqq x\leqq 1$ で $D>0$ で、この時 $\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)=0$

逆に $k^2<-4m^2$ ならば $0\leqq x\leqq 1$ で $D<0$ となる x が存在し、
$\mathrm{Im}\,\Pi(k^2)\neq 0 \quad (k^2<-4m^2)$ となる。