§14 プロパゲーターの Loop Correction

目標：propagator Δ $(\tilde{\Delta}(k^2))$を計算する.

§10より

$$\frac{1}{i}\Delta(x_1-x_2)=\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle=\delta_1\delta_2\, iW(J)\Big|_{J=0} \quad (14.1)$$

($iW(J)$：接続するダイアグラムの和，$\delta_i=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$：propagatorの端点)

→ 実際の計算はmomentum空間で行う方が良い

$$\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)=\underbrace{\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)}+\underbrace{\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)\left(i\Pi(k^2)\right)\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)}+O(g^4) \quad (14.2)$$


(Fig14.1)

ここで $\tilde{\Delta}(k^2)=\dfrac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon}$ ：自由場のpropagator (14.3)

$$i\Pi(k^2)=\boxed{\frac{1}{2}}\left(\boxed{ig}\right)^2\left(\frac{1}{i}\right)^2\int\frac{d^d l}{(2\pi)^d}\tilde{\Delta}((l+k)^2)\,\tilde{\Delta}(l^2)+i(\boxed{A}k^2+\boxed{B}m^2)+O(g^4)$$
(14.4)

Fig14.1の
$k+l$とlの入れ替え
の対称性より

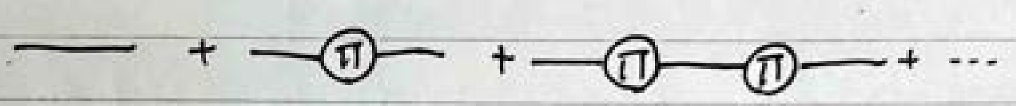
vertex factor：$iZ_g g$
$Z_g=1+O(g^2)$より.
$O(g^4)$に入れる.

$A=Z_\varphi-1$, $B=Z_m-1$
共に$O(g^2)$に注意

(14.2)を$\Pi(k^2)$の高次まで展開すると、

$$\frac{1}{i}\hat{\Delta}(k^2) = \frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2) + \frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)\left(i\Pi(k^2)\right)\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)$$
$$+ \frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)\left(i\Pi(k^2)\right)\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)\left(i\Pi(k^2)\right)\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2)$$
$$+ \cdots \qquad (14.5)$$

図で表すと Fig 14.2



ここで、$i\Pi(k^2)$を含むものは、one-particle irreducible (1PI)
(1ヶ所を切ってもつながっているダイアグラム)になっている。
g^4オーダーのものは Fig 14.3

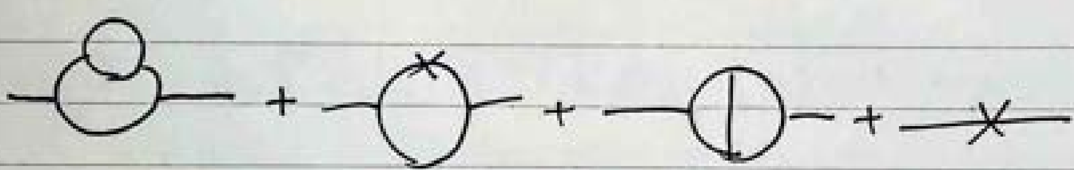


Fig 14.3

$$(14.5) \Rightarrow \hat{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon-\Pi(k^2)} \qquad (14.6)$$

$\hat{\Delta}(k^2)$は$k^2=-m^2$にpole (∵§13)をもつので、
(-32)

$$\begin{cases} \Pi(-m^2) = 0 & (14.7) \\ \Pi'(-m^2) = 0 & (14.8) \end{cases} \qquad \left(※\ \Pi'(k^2) = \frac{\partial \Pi}{\partial (k^2)} \right)$$

この2つの境界条件からA, Bを決定する。

(14.4)式の g^2 項について

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2}(ig)^2\left(\frac{1}{i}\right)^2 \underbrace{\int\frac{d^d l}{(2\pi)^d}\tilde{\Delta}((l+k)^2)\tilde{\Delta}(l^2)}_{d\geq 4\text{ のとき大きな } l \text{ で発散}} - i(Ak^2+Bm^2)+O(g^4)$$

(14.4再)

(なぜ?)

⇩

§9のtadpoleと同様に、UV cutoff Λ を導入する

以下では一旦、Π が有限になる $d<4$ で考える
(本当に考えたいのは $d=6$)

$\int$ を見積るtrick

◎ Feynman's formula (分母の結合)

$$\frac{1}{A_1\cdots A_n} = \int dF_n\,(x_1A_1+\cdots+x_nA_n)^{-n} \qquad (14.9)$$

$$\left(\int dF_n \equiv (n-1)!\int_0^1 dx_1\cdots dx_n\,\delta(x_1+\cdots+x_n-1) \qquad (14.10)\right)$$

Feynman's formulaを用いると、

$$\tilde{\Delta}((l+k)^2)\tilde{\Delta}(l^2) = \frac{1}{((l+k)^2+m^2)(l^2+m^2)}$$

$$= \int_0^1 dx\left[x((l+k)^2+m^2)+(1-x)(l^2+m^2)\right]^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx\left[l^2+2xlk+xk^2+m^2\right]^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx \left[(\underbrace{l + xk}_{})^2 + \underbrace{x(1-x)k^2 + m^2}_{} \right]^{-2}$$

$$\equiv \int_0^1 dx \left(q^2 + D \right)^{-2}$$

$(m^2 \to m^2 - i\epsilon$ とすれば元に戻る$)$

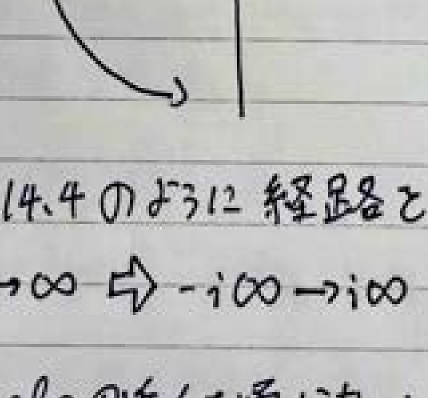
ここで $d^d l = d^d q$ より,

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((l+k)^2) \tilde{\Delta}(l^2) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx (q^2 + D)^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (q^2 + D)^{-2}$$

と簡単になる.

$\frac{1}{(q^2+D)^2}$ は, $q^0 = \mp \omega \pm i\epsilon$ に pole (経路の近くの pole は好ましくない)



(Fig 14.4)

$\longrightarrow$ Fig 14.4 のように経路を 180° 回せば OK

$-\infty \to \infty \Rightarrow -i\infty \to i\infty$ (Wick's rotation)

$\Rightarrow$ pole の近くを通らない + path integral は不変

ユークリッド d 次元ベクトル $\bar{q}$ を導入

$i\bar{q}_d = q^0, \quad \bar{q}_i = q_i$

このとき、$\bar{q}^2 = q^2$, $d^d q = i d^d \bar{q}$ なので、

$$\int d^d q\, f(q^2 - i\epsilon) = i \int d^d \bar{q}\, f(\bar{q}^2)$$ (ϵをムシできる)

(※ただし、$f(\bar{q}^2) \to 0$の早さが$1/\bar{q}^d$より早いとき)

↳ $d<4$のときのみ

以上をまとめると、

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} g^2 \underbrace{\int_0^1 dx \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D)^2}}_{\equiv I(k^2) \quad (14.18)} - (Ak^2 + Bm^2) + O(g^4)$$

(14.17)

($d<4$)

(14.17)を$\bar{q}$で球面積分可能に

○ 球面積分の前に他のtrickについて

A, Bの決定のために (14.7) $\Pi(-m^2) = 0$, (14.8) $\Pi'(-m^2) = 0$ を使う簡単な方法

1、$\Pi(k^2)$を2階ビ分

$$\Pi''(k^2) = \frac{1}{2} g^2 I''(k^2) + O(g^4) \qquad (14.19)$$

2、$I''(k^2)$を書き下す

$$I''(k^2) = \left[\int_0^1 dx \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D)^2} \right]''$$

$$= \int_0^1 dx\, 6x^2(1-x)^2 \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D)^4} \qquad (14.20)$$

($\because D = x(1-x)k^2 + m^2$)

3、(14.7),(14.8) の境界条件に沿って積分して
A, Bを決定!

☆この方法により、$d<8$ で$\int$が有限に!
⟶ dについて拡張できた ($d=6$ でもOK)

具体的なA,Bの決定方法

1、$\Pi(k^2)$ の k^2+m^2 中心のTaylor展開を考える.

$$\Pi(k^2)=\left[\frac{1}{2}g^2 I(-m^2)+(A-B)m^2\right] \quad ①$$
$$+\left[\frac{1}{2}g^2 I'(-m^2)+A\right](k^2+m^2) \quad ②$$
$$+\left[\frac{1}{2}g^2 I''(-m^2)\right]\frac{1}{2!}(k^2+m^2)^2+\cdots+O(g^4) \quad (14.21)$$

2、$I^{(n)}(-m^2)$ の収束条件について考える.

$I^{(n)}(-m^2)$ は、$d<4+2n$ で収束

3、①,② を消す

A, B は共に $O(g^2)$ → $\frac{1}{2}g^2 I(-m^2)$, $\frac{1}{2}g^2 I'(-m^2)$ と
打ち消すようにできる

※ $I(-m^2)$, $I'(-m^2)$ が発散するとしても、A, Bは観測量
ではないのでOK

以上より残るのは $\frac{1}{2}g^2 I''(-m^2)\frac{1}{2!}(k^2+m^2)^2$ の項以降のみ

⇨ $d\geq 8$ では $\Pi(k^2)$ は必ず発散 (非正規化可能)
(くわしくは§18)

NO.

DATE

$\Pi(k^2)$を (14.17) $\Pi(k^2)=\frac{1}{2}g^2 I(k^2)-(Ak^2+Bm^2)+O(g^4)$

$$(14.18)\quad I(k^2)=\int_0^1 dx\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\bar{q}^2+D)^2}$$

から計算する話に戻る

2通りの方法がある

$\boxed{A}$ ① $d<4$で直接計算

↓

② 結果から任意のdへ解析的に計算

↓

③ (14.7) $\Pi(-m^2)=0$, (14.8) $\Pi'(-m^2)=0$ からA,Bを固定

↓

④ $\lim(d\to 6)$ をとる

$\boxed{B}$ §9と同様に UV cutoff を導入して

$$\tilde{\Delta}(p^2)=\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\longrightarrow\frac{\Lambda^2}{p^2+\Lambda^2-i\varepsilon}\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$

(Pauli-Villarの正則化)

ここで $\Lambda\gg 1$より $\frac{\Lambda^2}{p^2+\Lambda^2-i\varepsilon}\sim 1$

① $\Pi(k^2,\Lambda)$を計算

↓

② A,Bを固定

↓

③ $\lim(\Lambda\to\infty)$ をとる.

※ $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ で得られる結果は同じ

KOKUYO

以下 $\boxed{A}$ で計算する。 $I(k^2)=\int_0^1 dx\int\frac{d^d\bar{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\bar{q}^2+D)^2}$

$\bar{q}$ の角度成分の積分は d次元球なので、

$$\Omega_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}d)} \qquad (14.23)$$

cf. d次元球表面積 $S_d(q)$

$$\begin{aligned}G_d &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^d\bar{q}\,\exp(-\bar{q}^2)\\ &= \int d^d\bar{q}\,\exp\left(-\sum_{i=1}^{d} q_i^2\right)\\ &= \prod_{i=1}^{d}\int dq\,\exp(-q^2)\\ &= \pi^{d/2}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}G_d &= \int_0^{\infty} dq\,\exp(-q^2)\,S_d(q)\\ &= S_d(1)\int_0^{\infty} dq\,q^{d-1}\exp(-q^2)\\ &= S_d(1)\frac{1}{2}\int_0^{\infty} d\xi\,\xi^{\frac{d}{2}-1}\exp(-\xi) \qquad (\xi=q^2)\\ &= S_d(1)\frac{\Gamma(d/2)}{2} \qquad \left(\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\xi^{z-1}e^{-\xi}d\xi\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \Omega_d=S_d(1)=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

◎ Γ関数の性質

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (14.24) \qquad \Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{(2n)!}{n!\,2^n}\sqrt{\pi} \quad (14.25)$$

$$\Gamma(-n+x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{n}k^{-1}+O(x)\right] \qquad (14.26)$$

$$(\gamma=0.5772\ldots)$$

動径方向積分もΓ関数で評価する

$I(k^2)$を少し一般化して、

$$\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{(q^2)^a}{(q^2+D)^b}=\frac{\Gamma(b-a-\frac{1}{2}d)\Gamma(a+\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}d)}D^{-(b-a-\frac{1}{2}d)}$$

(14.27)

(今後頻出らしい…)

(14.27)のPf (モチベーション:ベータ関数を使いたい)

$$\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{(q^2)^a}{(q^2+D)^b}=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}d)}\frac{1}{(2\pi)^d}\underline{\int dq\frac{q^{2a+d-1}}{(q^2+D)^b}}$$

下線部integralについて、

$$\int_0^\infty dq\frac{q^{2a+d-1}}{(q^2+D)^b}=\frac{D}{2}\int_0^\infty dz\frac{D^{a+\frac{d}{2}-1}z^{a+\frac{d}{2}-1}}{D^b(z+1)^b}\quad\left(z\equiv\frac{q^2}{D}\right)$$

$$=\frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2}\int_0^\infty dz\frac{z^{a+\frac{d}{2}-1}}{(z+1)^b}$$

$$=\frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2}\int_1^\infty d\eta\frac{(\eta-1)^{a+\frac{d}{2}-1}}{\eta^b}\quad(\eta\equiv z+1)$$

$$=\frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2}\int_1^\infty d\eta\,\eta^{-b+a+\frac{d}{2}-1}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)^{a+\frac{d}{2}-1}$$

$$=\frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2}\int_0^1 dt\,t^{b-a-\frac{d}{2}-1}(1-t)^{a+\frac{d}{2}-1}\quad\text{—}(*)$$

$(t\equiv 1/\eta)$

ここでベータ関数

$$B(p,q)=\int_0^1 dx\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$ を用いて、

$$(*)=\frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2}B\left(b-a-\frac{d}{2},a+\frac{d}{2}\right)\quad\text{—}(☆)$$

更に $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ より、

$$(\ast) = \frac{D^{-b+a+\frac{d}{2}}}{2} \cdot \frac{\Gamma(b-a-\frac{d}{2})\Gamma(a+\frac{d}{2})}{\Gamma(b)}$$

以上より (14.27) を得る。

(14.27) で、$a=0$, $b=2$ と考えて、

$$I(k^2) = \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\cdot 2} D^{-2-\frac{1}{2}d}$$

$d=6$ を考えるのは、g が無次元量になるから (∵ (12.12) 式等)

しかし…

$\varepsilon = 6-d$ のような状況を考えると、$[g] = [\varepsilon]/2 \neq 0$

そこで §12 で考えたように (無次元)×(有次元) の組み合わせに

$$g \to g\tilde{\mu}^{\varepsilon/2} \qquad (14.29)$$

($\tilde{\mu}$ に次元を押しつける)

このもとで $d = 6-\varepsilon$ とすると、

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(-1+\frac{\varepsilon}{2})}{(4\pi)^3}\int_0^1 dx\, D\left(\frac{4\pi}{D}\right)^{\varepsilon/2} \qquad (14.30)$$

$\alpha = g^2/(4\pi)^3$ (14.31) と導入して、

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} g^2 I(k^2) - (Ak^2 + Bm^2) + O(g^4) \quad ((14.17) より)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx\, D \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D}\right)^{\varepsilon/2} - (Ak^2 + Bm^2) + O(\alpha^2)$$

(14.32)

更にこれに対して (14.26) $\Gamma(-n+x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{n} k^{-1} + O(x)\right]$
と、$A^{\varepsilon/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\ln A + O(\varepsilon^2)$ を用いて、$\varepsilon \to 0$ をとると、

$$\frac{1}{2}\alpha\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^1 dx\, D\left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D}\right)^{\varepsilon/2}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\left[-\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + O(\varepsilon)\right)\right]\int_0^1 dx\, D\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} + O(\varepsilon^2)\right\}$$

$$\simeq -\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\underbrace{\int_0^1 dx\, D}_{①} - \frac{1}{2}\alpha\underbrace{\left[\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1\right)\int_0^1 dx\, D\,\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} - \gamma\int_0^1 dx\, D\right]}_{②}$$

$$① = \int_0^1 dx\left\{x(1-x)k^2 + m^2\right\} = \frac{1}{6}k^2 + m^2$$

$$② = \int_0^1 dx\, D\left\{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\ln\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} + \ln e^{-\gamma}\right\}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^1 dx\, D\left(\ln\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} + \ln e^{-\gamma}\right)$$

$$= \int_0^1 dx\, D \ln\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^{\gamma}D}$$

以上より

$$\Pi(k^2) = -\frac{1}{2}\alpha\left[\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\left(\frac{1}{6}k^2 + m^2\right) + \int_0^1 dx\, D \ln\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^{\gamma}D}\right]$$

$$- (Ak^2 + Bm^2) + O(\alpha^2) \quad (14.34)$$

$\mu \equiv \sqrt{4\pi}\, e^{-\gamma/2}\tilde{\mu}$ (14.35) を導入して、

$$\Pi(k^2) = -\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D \ln\frac{\mu^2}{D} - \left\{\frac{1}{6}\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)+A\right\}k^2 - \left\{\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)+B\right\}m^2 + O(\alpha^2)$$

ここで、

$$-\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{\mu^2}{D} = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\left(\ln\frac{D}{m^2} - 2\ln\frac{\mu}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{m^2} - \alpha\ln\frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{6}k^2+m^2\right)$$

まとめると、

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{m^2} - \left\{\frac{1}{6}\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\mu}{m}+\frac{1}{2}\right)+A\right\}k^2 - \left\{\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\mu}{m}+\frac{1}{2}\right)+B\right\}m^2 + O(\alpha^2) \quad (14.36)$$

定数 K_A, K_B を用いて、

$$A = -\frac{1}{6}\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\mu}{m}+\frac{1}{2}+K_A\right)+O(\alpha^2) \quad (14.37)$$

$$B = -\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ln\frac{\mu}{m}+\frac{1}{2}+K_B\right)+O(\alpha^2) \quad (14.38)$$

と書くと、

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{m^2} + \alpha\left(\frac{1}{6}K_A k^2 + K_B m^2\right) + O(\alpha^2) \quad (14.39)$$

⇨ $\Pi(k^2)$ は有限で、μ に依存しない

K_A, K_B を決定するには、(14.7) $\Pi(-m^2)=0$, (14.8) $\Pi'(-m^2)=0$ が必要
形式的に (14.39) を下のように書くと、

$$\Pi(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln D + \text{linear in } k^2 \text{ and } m^2 + O(\alpha^2)$$

(14.7) より、

$$\Pi(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{D_0} + \text{linear in } (k^2+m^2) + O(\alpha^2) \quad (14.41)$$

※ $D_0 \equiv D|_{k^2\to -m^2} = (1-x(1-x))m^2$
$k^2 \to -m^2$ で $\ln D/D_0 \to 0$

(14.8) については (14.41) を微分して、

$$\Pi'(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(1+\ln\frac{D}{D_0}\right) + \text{const} + O(\alpha^2)$$

を得るので、

$$\text{const} = -\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(1+\ln\frac{D}{D_0}\right)\Big|_{k^2\to -m^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, x(1-x) = -\frac{\alpha}{12}$$

$$\therefore\ \Pi(k^2)=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{D_0} - \frac{\alpha}{12}(k^2+m^2) + O(\alpha^2) \quad (14.43)$$

積分を実行することにより、(後述)

$$\Pi(k^2)=\frac{1}{12}\alpha\left[c_1 k^2 + c_2 m^2 + 2k^2 f(r)\right] + O(\alpha^2) \quad (14.44)$$

$$\left(\begin{array}{ll} c_1 \equiv 3-\pi\sqrt{3}, & c_2 \equiv 3-2\pi\sqrt{3} \\ f(r) \equiv r^3 \tanh^{-1}(r^{-1}), & r \equiv (1+4m^2/k^2)^{1/2} \end{array}\right)$$

※ $\Pi(k^2)$ は $k^2=-4m^2$ に分岐をもつ

※ $k^2<-4m^2$ で $\Pi(k^2)$ は虚部獲得 ⟶ §15へ

以上をまとめると.

$$\hat{\Delta}(k^2)=\frac{1}{1-\Pi(k^2)/(k^2+m^2)}\cdot\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} \quad (14.47)$$

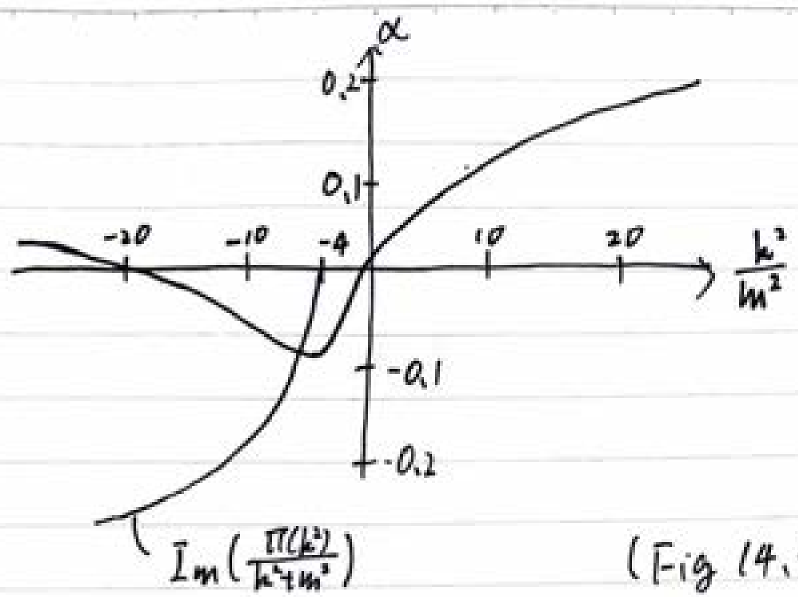
(※ (14.6) で $\varepsilon\to\varepsilon\left(1+\frac{\Pi(k^2)}{k^2+m^2}\right)$ と置き換えた)

$|k^2|$ が十分大きい領域では

$$\frac{\Pi(k^2)}{k^2+m^2}\simeq\frac{1}{12}\alpha\left[\ln(k^2/m^2)+c_1\right]+O(\alpha^2) \quad (14.48)$$

$$\left(\begin{aligned}\because\ f(r)&=r^3\tanh^{-1}(r^{-1})=\frac{r^3}{2}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)\\&\simeq\frac{r^3}{2}\ln\left(2+\frac{2m^2}{k^2}\right)\frac{k^2}{2m^2}\quad\left(\because r\simeq1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\\&\simeq\frac{r^3}{2}\ln\frac{k^2}{m^2}\\\therefore\ \frac{\Pi(k^2)}{k^2+m^2}&\simeq\frac{1}{12}\alpha\left(c_1+r^3\ln\frac{k^2}{m^2}\right)\\&\simeq\frac{1}{12}\alpha\left(\ln\frac{k^2}{m^2}+c_1\right)\quad(r\sim1)\end{aligned}\right)$$

$\Pi(k^2)/(k^2+m^2)$ の挙動は Fig (14.5)



(Fig 14.5)

k^2が負に大きいとき、$-\frac{1}{12}\pi\alpha + O(\alpha)$ に漸近

$|k^2|$が大きいとき、$|k^2|$のlogスケールで発散

合わないのは何故? $\Longrightarrow$ §26へ

(14.11)式 (Feynman's Formula) の証明

$$\int_0^1 dx_1 \cdots dx_n\, \delta(x_1+\cdots+x_n-1) = \frac{1}{(n-1)!}$$ を示す

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^1 dx_1 \cdots dx_{n-1}\, \theta(1-(x_1+\cdots+x_{n-1})) \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-(x_1+\cdots+x_{n-2})} dx_{n-1} \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-(x_1+\cdots+x_{n-3})} dx_{n-2}\,(1-(x_1+\cdots+x_{n-2})) \\
&= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^{1-(x_1+\cdots+x_{n-4})} dx_{n-3}\,\frac{1}{2}(1-(x_1+\cdots+x_{n-3}))^2 \\
&= \cdots = \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(n-2)!}(1-x_1)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

」

(14.44)式の導出について

$\int_0^1 dx\,(x(1-x)k^2+m^2)\left[\ln(x(1-x)k^2+m^2)-\ln((1-x(1-x))m^2)\right]$ を計算する

$$\int dx \ln(x^2-x+1)m^2 = x\ln m^2 + \int dx \ln(x^2-x+1)$$
$$= x\ln m^2 + x\ln(x^2-x+1) - \int dx \frac{x(2x-1)}{x^2-x+1} \quad —①$$

ここで

$$\int dx \frac{x(2x-1)}{x^2-x+1} = \int dx\left\{2+\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\right\}$$
$$= 2x + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\int dx \frac{1}{x^2-x+1} \quad —②$$

また

$$\int dx \frac{1}{x^2-x+1} = \int dx \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \int dx \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int dt \frac{1}{t^2+1} \qquad \left(t \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \quad —③$$

②,③より.

$$① = x\ln m^2 + x\ln(x^2-x+1) - 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \quad —④$$

次に、

$$\int dx\,(x-x^2)k^2\ln(x^2-x+1)m^2 = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln(x^2-x+1) - k^2\int dx\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)x^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
$$+\frac{k^2}{6}\ln m^2 \quad —⑤$$

ここで

$$k^2\int dx\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)x^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\frac{k^2}{6}\int dx\left(-4x^2+4x+5+\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{9}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\right)$$

$$=\frac{k^2}{6}\left\{-\frac{4}{3}x^3+2x^2+5x+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+3\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$— ⑥ \quad (\because ③)$$

⑥より、

$$⑤=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln(x^2-x+1)+\frac{k^2}{6}\left\{\frac{4}{3}x^3-2x^2-5x-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-3\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}+\frac{k^2}{6}\ln m^2$$

$$=\frac{k^2}{6}\left[\left(-2x^3+3x^2-\frac{1}{2}\right)\ln(x^2-x+1)+\frac{4}{3}x^3-2x^2-5x-3\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\ln m^2\right] — ⑦$$

④, ①より、

$$\int_0^1 dx\, D\ln D_0=\Big[③\times m^2+⑤\Big]_0^1$$

$$=m^2\left(\ln m^2-2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)+\frac{k^2}{6}\left(\frac{4}{3}-2-5-\sqrt{3}\pi+\ln m^2\right)$$

$$=m^2\left(-2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)+\frac{k^2}{6}\left(-\frac{17}{3}-\sqrt{3}\pi\right)+\left(\frac{k^2}{6}+m^2\right)\ln m^2 — (*)$$

次に $\int_0^1 dx\, D\ln D$ を考える.

$$\int_0^1 dx\left((x-x^2)k^2+m^2\right)\ln\left((x-x^2)k^2+m^2\right)$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2+m^2x\right]_0^1\ln m^2+\int_0^1 dx\left((x-x^2)k^2+m^2\right)\ln\left((x-x^2)\beta^2+1\right)$$

$$(\beta^2\equiv k^2/m^2)$$

$$=\left(\frac{k^2}{6}+m^2\right)\ln m^2+\int_0^1 dx\left((x-x^2)k^2+m^2\right)\ln\left((x-x^2)\beta^2+1\right) — ⑧$$

⑧第2項を考える.

$$\cdot \int dx \ln((x-x^2)\beta^2+1) = x\ln((x-x^2)\beta^2+1) + \int dx \frac{x(1-2x)\beta^2}{(x^2-x)\beta^2-1}$$

$$= x\ln((x-x^2)\beta^2+1) - 2x - \frac{1}{2}\ln((x-x^2)\beta^2+1)$$

$$- \left(\frac{\beta^2}{2}+2\right)\int \frac{dx}{(x^2-x)\beta^2-1} \quad \text{—} \ 9$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-x)\beta^2-1} = \int \frac{dx}{\beta^2(x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{\beta^2}{4}+1)}$$

$$= \frac{4}{\beta^2+4}\int \frac{dx}{\frac{4\beta^2}{\beta^2+4}(x-\frac{1}{2})^2 - 1}$$

$$= \frac{2}{\beta\sqrt{\beta^2+4}}\int \frac{dt}{t^2-1} \qquad \left(t \equiv \sqrt{\frac{4\beta^2}{\beta^2+4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\beta\sqrt{\beta^2+4}}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right)$$

$$= \frac{2}{\beta\sqrt{\beta^2+4}}\tanh^{-1} t \qquad \left(\because \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{(\frac{\beta^2}{2}+2)}\cdot\sqrt{1+4/\beta^2}\tanh^{-1}\frac{2}{\sqrt{1+4/\beta^2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(\frac{\beta^2}{2}+2)}\cdot r\tanh^{-1}\frac{2}{r}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \text{—} \ 10$$

$$\left(r = (1+4m^2/k^2)^{1/2}\right)$$

10 より

$$9 = x\ln((x-x^2)\beta^2+1) - 2x - \frac{1}{2}\ln((x-x^2)\beta^2+1) - r\tanh^{-1}\frac{2}{r}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{—} \ 11$$

$$\int dx (x-x^2)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1) + k^2\int \frac{x^2}{6}(3-2x)\frac{(1-2x)\beta^2}{(x^2-x)\beta^2-1}dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1)+\frac{k^2}{6}\int dx\left\{\left(4x^2-4x+\frac{4}{\beta^2}-1\right)-\frac{\beta^2 x+1-\frac{4}{\beta^2}}{(x^2-x)\beta^2-1}\right\}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1)+\frac{k^2}{6}\left[\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+\left(\frac{4}{\beta^2}-1\right)x\right)-\frac{1}{2}\ln((x^2-x)\beta^2-1)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\beta^2}{2}+1-\frac{4}{\beta^2}\right)\int\frac{dx}{(x^2-x)\beta^2-1}\right]$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1)+\frac{k^2}{6}\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+\left(\frac{4}{\beta^2}-1\right)x\right)-\frac{k^2}{12}\ln((x^2-x)\beta^2-1)$$
$$-\frac{\left(\frac{\beta^2}{2}-1\right)}{\left(\frac{\beta^2}{2}+2\right)}r^2\cdot r\tanh^{-1}\frac{2}{r}\left(x-\frac{1}{2}\right)\qquad(\because 10)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)k^2\ln((x-x^2)\beta^2+1)+\frac{k^2}{6}\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+\left(\frac{4}{\beta^2}-1\right)x\right)-\frac{k^2}{12}\ln((x^2-x)\beta^2-1)$$
$$-\frac{k^2}{6}\left(1-\frac{6}{\beta^2r^2}\right)r^3\tanh^{-1}\frac{2}{r}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad\text{—— }12$$

8, 11, 12 より、

$$\int_0^1 dx\,D\ln D=\left(\frac{k^2}{6}+m^2\right)\ln m^2+\left[11\times m^2+12\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{k^2}{6}+m^2\right)\ln m^2+\left[\left(-2m^2-2m^2r\tanh^{-1}\frac{1}{r}\right)+\frac{k^2}{6}\left(\frac{4}{3}-2+\left(\frac{4}{\beta^2}-1\right)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{k^2}{3}\left(r^3-\frac{6}{\beta^2}r\right)\tanh^{-1}\frac{1}{r}\right]$$
$$=\left(\frac{k^2}{6}+m^2\right)\ln m^2-2m^2+\frac{k^2}{6}\left(\frac{4}{\beta^2}-\frac{5}{3}\right)-\frac{k^2}{3}r^3\tanh^{-1}\frac{1}{r}\quad\text{—— }(☆)$$

(∗), (☆) より、

$$\int_0^1 dx\,D\ln D/D_0=(☆)-(∗)$$
$$=\frac{k^2}{6}(4-\sqrt{3}\pi)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)m^2-\frac{k^2}{3}r^3\tanh^{-1}\frac{1}{r}$$
$$\text{—— }13$$

$$\therefore \Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha \times (13) - \frac{1}{12}\alpha(k^2+m^2) + O(\alpha^2)$$

$$= \frac{\alpha}{12}\left[k^2(3-\sqrt{3}\pi) + m^2\left(3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - 2k^2 r^3 \tanh^{-1}\frac{1}{r}\right] + O(\alpha^2).$$