§13 プロパゲータのLehmann-Källen形式

○ 相互作用のある場での運動量空間でのプロパゲータを求める。

プロパゲータ

$$\Delta(x-y) \equiv i \langle 0 | T\, \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \quad (13.1)$$

$\varphi(x)$ は以下で規格化する

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0 \;,\; \langle k | \varphi(x) | 0 \rangle = e^{-ikx} \quad (13.2)$$

・1粒子状態 $|k\rangle$ の規格化（d次元）

$$\langle k | k' \rangle = (2\pi)^{d-1} 2\omega\, \delta^{d-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\left(\omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (13.3)$$

・完全性の条件

$$\int \underbrace{d\tilde{k}} \; |k\rangle\langle k| = \underbrace{I_1}_{\text{1粒子の部分空間での恒等作用素}} \quad (13.4)$$

$$d\tilde{k} \equiv \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1} 2\omega} \quad (13.5)$$

また 運動量空間でのプロパゲータ$\tilde{\Delta}(k^2)$を以下で定義する

$$\Delta(x-y) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \tilde{\Delta}(k^2) \qquad (13.6)$$

(13.1)式にエネルギー固有状態の完全性の条件を入れる.

エネルギー固有状態は以下の3つ

① 基底状態 or 真空 $|0\rangle$: エネルギー、運動量が0の単一の状態

② 1粒子状態 $|k\rangle$: 3成分の運動量kと エネルギー $w=(m^2+k^2)^{\frac{1}{2}}$で決まる

③ 多粒子状態 $|k, n\rangle$: 3成分の運動量kとその他のパラメータn(他の粒子との相互作用に関する量)で決まる.
エネルギーは $w=(M^2+k^2)^{\frac{1}{2}}$
$(M \geq 2m)$

これら全てを(13.1)式に入れる.

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$= \underbrace{\langle 0|\varphi(x)|0\rangle\langle 0|\varphi(y)|0\rangle}_{①}$$

$$+ \underbrace{\int d\tilde{k} \langle 0|\varphi(x)|k\rangle\langle k|\varphi(y)|0\rangle}_{②}$$

$$+ \sum_n \int d\tilde{k} \langle 0|\varphi(x)|k,n\rangle\langle n,k|\varphi(y)|0\rangle \quad ③$$

パラメータnに関する
積分をまとめて略記

とすると.

① → (13.2) より 0

② → (13.2) より $\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)}$

③

$$\langle k,n|\varphi(x)|0\rangle = e^{-ikx}\langle k,n|\varphi(0)|0\rangle \ (13.9) \text{ より}$$

$$\sum_n \int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} |\langle k,n|\varphi(0)|0\rangle|^2$$

⇓

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$= \int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} + \sum_n \int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} |\langle k,n|\varphi(0)|0\rangle|^2 \quad (13.10)$$

さらに スペクトル密度 $\rho(s)$ を以下で定義する

$$\rho(s) \equiv \sum_n |\langle k,n|\varphi(0)|0\rangle|^2 \delta(s-M^2) \quad (13.11)$$

($M \geq 2m$ より　$s \geq 4m^2$ のとき $\rho(s) \geq 0$

$s < 4m^2$ のとき $\rho(s) = 0$

これを用いると

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$=\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} + \sum_n \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \delta(s-M^2)\, |\langle k,n|\varphi(0)|0\rangle|^2 \int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)}$$

$$=\underbrace{\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)}}_{k^0=(m^2+\boldsymbol{k}^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \underbrace{\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)}}_{k^0=(s+\boldsymbol{k}^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (13.12)$$

$\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$ も同様に計算する. (xとyを入れ換える)

$$\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle = \int d\tilde{k}\, e^{-ik(x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \int d\tilde{k}\, e^{-ik(x-y)} \qquad (13.13)$$

時間順序積を入れて計算

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$+\theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$$

(13.12)
(13.13)
を代入

$$=\theta(x^0-y^0)\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\int d\tilde{k}\, e^{-ik(x-y)}$$

$$+\int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \left\{\theta(x^0-y^0)\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\int d\tilde{k}\, e^{-ik(x-y)}\right\}$$

またChapter 8の(8.11)、(8.13)をd次元に拡張すると

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2-i\varepsilon} = i\,\theta(x^0-y^0)\int d\tilde{k}\, e^{ik(x-y)} + i\,\theta(y^0-x^0)\int d\tilde{k}\, e^{-ik(x-y)} \tag{13.15}$$

これを用いて

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2-i\varepsilon}$$

$$+\int_{4m^2}^{\infty} ds\,\rho(s)\,\frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2-i\varepsilon}$$

整理して.

$$i\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \left[\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\,\rho(s)\,\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon}\right] \tag{13.16}$$

(13.6)と比較すると

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\,\rho(s)\,\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} \tag{13.17}$$

を得る.

Lehamann-Källen表示の運動量空間でのプロパゲータ