12 Dimensional analysis with $\hbar = c = 1$

[目標]
一般次元のラグランジアン密度の次元解析から場の演算子と結合定数の次元を見る．また結合定数が無次元となるような空間次元を与える．

時間次元 T は $T = c^{-1}L$ と長さ次元で書け, L は $L = \hbar c^{-1} M^{-1}$ と質量次元で書けるので, 自然単位系 $\hbar = c = 1$ では任意の物理量が質量次元を持つ．ラグアンジアンの次元解析には質量次元を見ればよい．$[A]$ を A の質量次元として, 例えば

$$[m] = +1 \tag{12.1}$$
$$[x^\mu] = -1 \tag{12.2}$$
$$[\partial^\mu] = +1 \tag{12.3}$$
$$[d^d x] = -d \tag{12.4}$$

微分演算子は長さの逆数の次元のため $+1$.
ここで後の考察のため, d 次元時空を考える．ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n!}g_n\varphi^n \tag{12.5}$$

と与える．より一般的な議論のため, 相互作用項を φ^N まで与えた．φ の 1 次と 2 次についてはくりこみ項に含ませられるので 3 次以上の相互作用を考えた．また有限これを用いて, d 次元時空での作用は

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \tag{12.6}$$

と書け, また

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^d x(\mathcal{L} + J\varphi)\right] \tag{12.7}$$

であり, 作用が指数の肩に現れるため

$$[S] = 0 \tag{12.8}$$

であるはずなので, (12.4) 式より

$$[\mathcal{L}] = d \tag{12.9}$$

でなければならない．つまり $\mathcal{L}$ の各項が d 次の質量次元となるはず．そのため, 例えば $1/2\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ の項を考えると, $[\partial^\mu] = 1$ より

$$[\varphi] = \frac{1}{2}(d-2) \tag{12.10}$$

を満たさなければならないことが分かる．これは確かに

$$\left[\frac{1}{2}m^2\varphi^2\right] = [m^2] + [\varphi^2] = 2 + (d-2) = d$$

となる. 続いて, $g_n\varphi^n$ 項を考え

$$[g_n\varphi^n] = [g_n] + \frac{1}{2}n(d-2) = d$$

より

$$[g_n] = d - \frac{1}{2}n(d-2) \tag{12.11}$$

と結合定数の次元がわかる. 特に φ^3theory では

$$[g_3] = \frac{1}{2}(6-d) \tag{12.12}$$

つまり $d=6$ で無次元となる.

以降では結合定数が無次元の理論を考えたい. というのも結合定数が質量について有次元の場合, 以下に述べるようにスカラー場の理論の相互作用の性質を見るにあたり不都合があるからだ.

まず相互作用項を (無次元)×(有次元) の形にする. この無次元の係数は有次元の相互作用の寄与の大きさを表すということはすぐ分かるだろう. その係数とは, $[s]=2$ より

$$gs^{-[g]/2} \tag{12.13}$$

と書ける (もしくはこの定数倍). 実際

$$\left[gs^{-[g]/2}\right] = [g] + [s^{-[g]/2}] = [g] - [g] = 0$$

と無次元である. 例えば $d=4$ で $[g_3]=1$ であることを考慮すると, 教科書 (11.7) 式より散乱振幅が (12.13) 式の自乗の次元の摂動であることが分かる.

さて $[g]<0$ の場合, s が大きくなる, つまり高エネルギーになるにつれて (12.13) 式が発散的なふるまいを示すので, もはや摂動計算が不可能になってしまう. 実はこれは $[g]<0$ の理論が繰り込み不可能であることの現れであり, section18 で見るように, みかけの発散次数 D が正となってしまい, これを打ち消すには section29 で見るように無限個のパラメーター が必要となる. ここでは有限個の相互作用項を考えているので, 発散を打ち消せず, よって $[g]<0$ の理論は一先ず考えない.

続いて $[g]>0$ の場合だが, 逆に s が大きくなるにつれて $gs^{-[g]/2}\to 0$ と自由場に近づいてしまうので, 相互作用の性質を見るにふさわしくない.

以上の理由から, $[g]=0$ となる理論を考える. つまり φ^3theory で $d=6$ を考えることになる.