Date 5 . 20

11. 断面積と[減衰率 (decay rate) / 崩壊率]

散乱振幅 T を計算したので、これを実験ではかったものと対応させる
よく使う2つの場合を考える
① 入射粒子が1つ、崩壊率をはかる。
② 〃 2つ、断面積をはかる。☆こっちやる

2粒子が入って2粒子が出ていくときを考える。§10より

$$T = g^2\left[\frac{1}{(k_1+k_2)^2+m^2} + \frac{1}{(k_1-k_1')^2+m^2} + \frac{1}{(k_1-k_2')^2+m^2}\right] + O(g^2)$$

((10.13), (10.14) より)

$\left(\begin{array}{l} k_1, k_2 : \text{入射粒子の4元運動量} \\ k_1', k_2' : \text{出ていく 〃} \end{array}\right)$ $k_1+k_2 = k_1'+k_2'$

これらの粒子は全て on shell : $k_i^2 = -m_i^2$
(後から使う、粒子が異なる質量をもつ可能性がある。)

この過程を kinematics で考える
運動学：保存量を用いて運動を議論する方法
重心系 (CM系) で、$\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0$ 、$\mathbf{k}_1$ を $+z$ 方向にえらぶ
始状態を特定する the only variable (変数) left は $\mathbf{k}_1$ の大きさだけ
同じように、CM系での全運動エネルギー E_1+E_2 も特定できる (指定)
もっと便利にするために、

$$s = -(k_1+k_2)^2 \quad : \text{ローレンツスカラー}$$

を導入する。
CM系では、E_1, E_2 だけのこって $s = +(E_1+E_2)^2$
$E_1 = (\mathbf{k}_1^2+m_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $E_2 = (\mathbf{k}_1^2+m_2^2)^{\frac{1}{2}}$ より $|\mathbf{k}_1|$ を s について
逆に解くと、

$$\because\ s = +\left(\mathbf{k}_1^2+m_1^2+2\sqrt{\mathbf{k}_1^2+m_1^2}\sqrt{\mathbf{k}_1^2+m_2^2}+\mathbf{k}_1^2+m_2^2\right)$$

$$(-s+2\mathbf{k}_1^2+m_1^2+m_2^2)^2 = 4(\mathbf{k}_1^2+m_1^2)(\mathbf{k}_1^2+m_2^2)$$

$$s^2+(m_1^2+m_2^2)^2-4s\mathbf{k}_1^2-2s(m_1^2+m_2^2) = 4m_1^2m_2^2$$

$$4s\mathbf{k}_1^2 = s^2-2s(m_1^2+m_2^2)+(m_1^2-m_2^2)^2$$

$$☆\quad |\mathbf{k}_1| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2-2(m_1^2+m_2^2)s+(m_1^2-m_2^2)^2} \qquad (11.2)$$

No.

Data 5・21

(11.2)(再) $|\mathbf{k}_1| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2(m_1^2+m_2^2) + (m_1^2-m_2^2)^2}$ (CM) ←

出ていく粒子は2つ。運動量保存より、$\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2' = 0$

エネルギー 〃 $(E_1'+E_2')^2 = s$

$\therefore |\mathbf{k}_1'| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2(m_1'^2+m_2'^2) + (m_1'^2-m_2'^2)^2}$ (CM) (11.3)

今、終状態を特徴づける the only variable left は $\mathbf{k}_1$ と $\mathbf{k}'$ の間の角

ただし、$t \equiv -(k_1-k_1')^2$ を使った方が便利

$$t = m_1^2 + m_1'^2 - 2E_1E_1' + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1'|\cos\theta \quad (11.4)$$

(CM系以外でも成立)

ローレンツスカラー量 s, t は 3つの Mandelstan variables のうちの2つ。

$$\begin{cases} s \equiv -(k_1+k_2)^2 = -(k_1'+k_2')^2 \\ t = -(k_1-k_1')^2 = -(k_2-k_2')^2 \\ u = -(k_1-k_2')^2 = -(k_2-k_1')^2 \end{cases} \quad (11.5)$$

s, t, u は独立ではない。

$$s+t+u = m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2 \quad (11.6) \quad (\because k^2 = -m^2)$$

$\because$) $s+t+u = m_1^2+m_2^2 - 2k_1k_2 + m_1^2 + m_1'^2 + 2k_1k_1' + m_1^2 + m_2'^2 + 2k_1k_2'$

$m_1^2 - k_1k_2 + k_1k_1' + k_1k_2'$

$= -k_1(k_1+k_2-k_1'-k_2') = 0$ ($\because$ 運動量保存)

よって ～ のところだけ残って示された

(11.1)(再) $T = g^2\left[\frac{1}{(k_1+k_2)^2+m^2} + \frac{1}{(k_1+k_1')^2+m^2} + \frac{1}{(k_1-k_2')^2+m^2}\right] + O(g^4)$

$$= g^2\left[\frac{1}{m^2-s} + \frac{1}{m^2-t} + \frac{1}{m^2-u}\right] + O(g^4) \quad (11.7)$$

異なる系：fixed target or FT frame (=lab frame) で考える

→ 粒子2がうごかない：$\mathbf{k}_2 = 0$

$$|\mathbf{k}_1| = \frac{1}{2m_2}\sqrt{s^2 - 2(m_1^2+m_2^2)s + (m_1^2-m_2^2)^2} \quad (11.8)$$

No.
Date 5.21

(i)
$$s = (E_1 + E_2)^2 - |\mathbb{k}_1|^2$$
$$= \mathbb{k}^2 + m_1^2 + 2\sqrt{}\sqrt{} + \mathbb{k}_2^2 + m_2^2 - \mathbb{k}_1^2$$
$$s - m_1^2 - m_2^2 = 2\sqrt{\mathbb{k}_1^2 + m_1^2} \cdot m_2$$
$$\left[\frac{1}{2m_2}(s - m_1^2 + m_2^2)\right]^2 = \mathbb{k}_1^2 + m_1^2$$
$$\mathbb{k}_1^2 = \frac{1}{4m_2^2}\left(s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 + m_2^2)^2\right) - \frac{m_1^2 m_1^2}{4m_2^2}$$
$$|\mathbb{k}_1| = \frac{1}{2m_2}\sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad (11.8)$$
(FT frame)

(11.2) と (11.8) を見比べると、
$$m_2 |\mathbb{k}_1|_{FT} = \sqrt{s}\, |\mathbb{k}_1|_{CM} \quad (11.9)$$
これは後から役に立つ

s, t, u の導入

微分断面積を求める公式をかきたい!

実験は、大きな体積 V. の中で、長い時間Tをかけて行うものとする。
波束は一緒に来るものとるが、代わりにいくつかの簡単なショートカットをつかう
一般的な解を得るときは、出ていく粒子の数を任意にする。
§10を思い出すと、始状態と終状態の overlap は、
$$\langle f | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})\, iT \quad (11.10) \quad ((10.14) と同じ)$$
確率は、
$$P = \frac{|\langle f | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} \quad (11.11)$$
分子は
$$|\langle f | i \rangle| = [(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})]^2 |T|^2 \quad (11.12)$$
δ関数の2乗は、
$$[(2\pi)^4 \delta(k_{in} - k_{out})]^2 = (2\pi)^4 \delta(k_{in} - k_{out}) \times (2\pi)^4 \delta(0) \quad (11.13)$$
ここで、
$$(2\pi)^4 \delta(0) = \int d^4x\, e^{i0\cdot x} = \int d^4x \cdot 1 = VT \quad (11.14)$$
1粒子状態は、
$$\langle k | k \rangle = \langle 0 | a(\mathbb{k})\, a^\dagger(\mathbb{k}) | 0 \rangle \quad ((5.1)より)$$
$$= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbb{k} - \mathbb{k}) \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | a^\dagger(\mathbb{k}) \underbrace{a(\mathbb{k}) | 0 \rangle}_{=0\ ((5.3)より)} \quad ((4.2)より)$$
$$= (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(0) \quad (11.14) と同じ変形$$
$$= 2k^0 V$$
(11.15)

No.

Date 5・21

(11.15)(再) $\langle k|k\rangle = 2k^0 V$ 　n粒子状態は1粒子状態を単純につなげるだけでいいらしい

$\langle i|i\rangle = 4E_1E_2V^2$ 　(11.16)　(入射粒子は2つ)

$\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n} 2k_j'^0 V$ $(\propto V^n)$ 　(11.17)　n'：出ていく粒子の数

これらと (11.12) を (11.11) に代入する

$$P = \frac{[(2\pi)^4 \delta(k_{in} - k_{out}) VT]|T|^2}{4E_1E_2V^2 \prod_{j=1}^{n} 2k_j'^0 V}$$

いらない

Tでわって

$$\dot{P} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) V |T|^2}{4E_1E_2V^2 \prod_{j=1}^{n} 2k_j'^0 V} \quad (11.18)$$

これは、正確な運動量をもって出ていく粒子セットが散乱される単位時間あたりの確率である。測定できる量にするために、各出ていく粒子の3次元運動量 $\mathbf{k}_j'$ の和をとる。箱に入れたので、全ての3次元運動量は量子化されて、$\mathbf{k}_j' = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}_j$ とかける。$V = L^3$, $\mathbf{n}_j$ は整数3次元ベクトル (ここで境界条件を使ったが、最終結果は境界条件によらない)

Lの無限の中で、

$$\sum_{\mathbf{n}_j} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k_j' \quad (11.19)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}_j} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) |T|^2}{4E_1E_2V^2} \prod_{j=1}^{n'} \frac{1}{2k_j'^0}$$

$$= \frac{1}{\cancel{V}} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) |T|^2}{4E_1E_2V} \prod_{j=1}^{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k_j' \frac{1}{2k_j'^0}$$

$$= \boxed{\int} \quad {}^{\prime\prime} \quad \prod_{j=1}^{n'} \widetilde{dk_j'}$$

これをとれば適当な運動量の幅をもった確率/sになる。

これは $\dot{P}$ に $\frac{V d^3k'}{(2\pi)^3}$ をかける操作と同じ

$$\boxed{\dot{P} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1E_2V} |T|^2 \prod_{j=1}^{n'} \widetilde{dk_j'} \quad (11.20) \quad / \quad \text{ただし } \widetilde{dk} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \quad (11.21)}$$

(§3で導入)

No.

Date 5・21

Pから微分断面積 $d\sigma$ に変換するのに、入射フラックスで割る。
粒子2が止まったFT系で考える。

入射flux ＝（粒子2にぶつかるところの単位体積あたりの粒子数）×（速度）

今は V の中に粒子1は1つで、速さは $v = \frac{|\mathbb{k}_1|}{E_1}$ なので

入射flux $= \frac{1}{V} \times \frac{|\mathbb{k}_1|}{E_1}$ 　あたらしい行で

これより、P を入射fluxでわったら、V がうちけされて、$\frac{|\mathbb{k}_1|}{E_1}$ におきかわる。

また、$E_2 = m_2$、(11.8)より $|\mathbb{k}_1|_{FT}\, m_2$ は s の式で書ける。

$d\sigma$ はローレンツ不変なので、この s の式を $m_2|\mathbb{k}_1|_{FT}$ の値として使ってよい。(11.9)に用いて

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4\delta^4(k_{in}-k_{out})}{4E_1E_2\cdot\frac{|\mathbb{k}_1|}{E_1}}|T|^2\prod_{j=1}^{n'}\widetilde{dk_j'}$$

$$= 4m_2|\mathbb{k}_1| = 4\sqrt{s}\,|\mathbb{k}_1|_{CM}$$

$$= \frac{1}{4|\mathbb{k}_1|_{CM}\sqrt{s}}|T|^2\,(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_{out})\prod_{j=1}^{n'}\widetilde{dk_j'}$$

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4|\mathbb{k}_1|_{CM}\sqrt{s}}|T|^2\, dLIPS_{n'}(k_1+k_2)} \quad (11.22)$$

ただし

$$dLIPS_{n'}(k) \equiv (2\pi)^4\delta^4\left(k - \sum_{i=1}^{n'} k_i'\right)\prod_{j=1}^{n'}\widetilde{dk_j'} \quad (11.23)$$

入2粒子 → 出 n' 粒子 の微分散乱断面積の結論コレ

2粒子が出ていく場合に特定してみてみる。

$$dLIPS_2(k) = (2\pi)^4\delta^4(k-k_1'-k_2')\,\widetilde{dk_1'}\,\widetilde{dk_2'} \quad (11.24)$$

$dLIPS_2(k)$ はローレンツ不変なので、好きな系で計算してよい

⟶ CM系とる：$\mathbb{k} = \mathbb{k}_1+\mathbb{k}_2 = 0$, $k^0 = E_1+E_2 = \sqrt{s}$

$$\therefore dLIPS_2(k) = (2\pi)^4\delta(E_1'+E_2'-\sqrt{s})\,\delta^3(\mathbb{k}_1'+\mathbb{k}_2')\frac{d^3k_1'}{(2\pi)^3 2E_1'}\frac{d^3k_2'}{(2\pi)^3 2E_2'}$$ (11.21より)

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2E_1'E_2'}\delta(E_1'+E_2'-\sqrt{s})\,\delta^3(\mathbb{k}_1'+\mathbb{k}_2')\,d^3k_1'\,d^3k_2' \quad (11.25)$$

積分して消す

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2E_1'E_2'}\delta(E_1'+E_2'-\sqrt{s})\,d^3k_1' \quad (11.26)$$

ここで、$E_1' = \sqrt{|\mathbb{k}_1'|^2+m_1'^2}$, $E_2' = \sqrt{|\mathbb{k}_1'|^2+m_2'^2}$ (11.27)

$$d^3k_1' = |\mathbb{k}_1'|^2\,d|\mathbb{k}_1'|\,d\Omega_{CM} \quad (11.28)$$

$d\Omega_{CM}$: $\sin\theta\, d\theta\, d\phi$,　θ は $\mathbb{k}_1$ と $\mathbb{k}_1'$ のなす角（CM系）

(11.26)の積分は、$\int dx\,\delta(f(x)) = \sum_i |f'(x_i)|^{-1}$（$x_i$ は $f(x)=0$ をみたす）
を用いて実行する。

No.
Date 5.26

デルタ関数によって

(11.3) $|\mathbf{k}_1'| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2(m_{1'}^2 + m_{2'}^2) + (m_{1'}^2 - m_{2'}^2)^2}$ (CM)で与えられる$|\mathbf{k}_1|$

だけが残る。δ関数から出てくる分は、

$$\frac{\partial}{\partial |\mathbf{k}_1'|}(E_1' + E_2' - \sqrt{s}) = \frac{|\mathbf{k}_1'|}{E_1'} + \frac{|\mathbf{k}_1'|}{E_2'}$$

$$= \frac{E_1' + E_2'}{E_1' E_2'} |\mathbf{k}_1'| = \frac{|\mathbf{k}_1'|\sqrt{s}}{E_1' E_2'} \quad (11.29)$$

これから

$$d\mathrm{LIPS}_2(k) = \frac{1}{4(2\pi)^2 \cancel{E_1' E_2'}} \cdot \frac{\cancel{E_1' E_2'}}{\cancel{|\mathbf{k}_1'|}\sqrt{s}} |\mathbf{k}_1'|^2 d\Omega_{CM}$$

$$= \frac{|\mathbf{k}_1'|}{16\pi^2\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (11.30)$$

(11.22): $d\sigma = \frac{1}{4|\mathbf{k}_1|_{CM}\sqrt{s}} |T|^2 d\mathrm{LIPS}_{n'}(k_1 + k_2)$

と合わせると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{k}_1'|}{|\mathbf{k}_1|} |T|^2 \quad (11.31)$$

$|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_1'|$ は (11.2), (11.3) で与えられる。

$d\Omega_{CM}$ はCM系での微分立体角 (differential solid angle)

(11.4) $t = m_1^2 + m_{1'}^2 - 2E_1E_1' + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1'|\cos\theta$

☆ 微分断面積は系のとり方によらない。

∴ s固定で(11.4)を微分すると、

$$dt = 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1'|\, d(\cos\theta) \quad (11.32)$$

$$= 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1'| \frac{d\Omega_{CM}}{2\pi} \quad (11.33)$$

(11.31) は、

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} \frac{d\Omega_{CM}}{dt} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\cancel{|\mathbf{k}_1'|}}{|\mathbf{k}_1|} |T|^2 \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}|\mathbf{k}_1|\cancel{|\mathbf{k}_1'|}}$$

$$= \frac{1}{64\pi s |\mathbf{k}_1|^2} |T|^2$$

($|\mathbf{k}_1|$ は (11.2) で与えられる s の関数)

$\frac{d\sigma}{dt}$ から (11.4) の式を用いて好きな系での $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ に変換できる

一般には $|\mathbf{k}_1'|$ が θ だけでなく s にも依っているので、

(11.32) のような式はより複雑になる。

No.

Date 5.29.

出ていく粒子が n' のときの話にもどる
全断面積を求める。全ての出ていく運動量で積分して、symmetry factor S で割ればよい。
i タイプの同じ出ていく粒子の数を n_i として、 identical 同一の

$$S = \prod_i n_i! \qquad (11.35)$$

$$\sigma = \frac{1}{S}\int d\sigma \qquad (11.36)$$

(11.22) より、 $d\sigma = \frac{1}{4|\vec{k}_1|_{cm}\sqrt{s}}|T|^2\, dLIPS_{n'}(k_1+k_2)$

$dLIPS_{n'}$ の中の全ての運動量を足し上げるとき、終状態は、その運動量に順番にラベル付けして扱っていたが、同一の粒子の場合、unordered なので
(ordered) (例 $a^\dagger_1 a^\dagger_2|0\rangle$ と $a^\dagger_2 a^\dagger_1|0\rangle$ は同じ)
→ symmetry facter が必要

$\boxed{\text{2粒子の場合}}$

$$\sigma = \frac{1}{S}\int d\Omega_{CM}\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} \qquad (11.37)$$

$$= \frac{2\pi}{S}\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} \qquad (11.38)$$

S は、$S=2$ (同一粒子) か $S=1$ (異なる粒子)
(11.34) より

$$\sigma = \frac{1}{S}\int_{t_{min}}^{t_{max}} dt\, \frac{d\sigma}{dt} \qquad (11.39)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \cos\theta & -1 \to 1 \\ \hline t & t_{min} \to t_{max} \end{array}\right)$$

we should first express t and u

・(11.38) を計算する：(11.4) や (11.6) を用いて、s、θ の式を t、u になおして、 逆かな
s：fix で θ 積分を行う。
・(11.39) を計算する：(11.6) を用いて s と t の式を u になおして、
s：fix で t 積分を行う。

(11.7)：$g^2\left[\frac{1}{m^2-s}+\frac{1}{m^2-t}+\frac{1}{m^2-u}\right]+O(g^4)$：$\varphi^3$ 理論の散乱振幅がどうはたらいているのかを見る。全粒子の質量が同じで、CM 系の場合を考える。

No.

Date 5・29・

つまり、4つ全ての粒子で、$E = \frac{1}{2}\sqrt{s}$, $|\mathbf{k}_1'| = |\mathbf{k}_1| = \frac{1}{2}(s-4m^2)^{\frac{1}{2}}$

このとき、(11.4) は、

$$t = m_1^2 + m_1'^2 - 2E_1E_1' + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1'|\cos\theta$$
$$= 2m^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{s}}{2}\frac{\sqrt{s}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}(s-4m^2)\cos\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(s-4m^2)(1-\cos\theta) \qquad (11.40)$$

(11.5) より、$s+t+u = m_1^2 + m_1'^2 + m_2^2 + m_2'^2$

$$u = 4m^2 - s + \frac{1}{2}(s-4m^2)(1-\cos\theta)$$
$$= -\frac{1}{2}(s-4m^2)(1+\cos\theta) \qquad (11.41)$$

$|T|^2$ は s と θ の関数。非相対論的極限で、$|\mathbf{k}_1| \ll m \to s-4m^2 \ll m^2$ より。

(11.7): $T = g^2\left[\frac{1}{m^2-s} + \frac{1}{m^2-t} + \frac{1}{m^2-u}\right] + O(g^4)$

$X = \frac{s-4m^2}{m^2}$ とおくと、

$$T = g^2\left[\frac{1}{m^2-m^2(X+4)} + \frac{1}{m^2+\frac{1}{2}X(1-\cos\theta)m^2} + \frac{1}{m^2+\frac{1}{2}X(1+\cos\theta)m^2}\right] + O(g^4)$$
$$= \frac{g^2}{m^2}\left[\frac{1}{-X-3} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}X(1-\cos\theta)} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}X(1+\cos\theta)}\right] + O(g^4)$$

これを X で Tayler 展開して、

$$f(X) = \frac{1}{-X-3} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}X(1-\cos\theta)} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}X(1+\cos\theta)}$$

とすると、

$$f(0) = -\frac{1}{3} + 1 + 1 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$
$$f'(X) = +\frac{1}{(X+3)^2} - \frac{1}{(1+\frac{1}{2}X(1-\cos\theta))^2}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\theta) - \frac{1}{(1+\frac{1}{2}X(1+\cos\theta))^2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\theta)]$$
$$f'(0) = \frac{1}{9} - \frac{1}{2}(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$$
$$f''(X) = -\frac{2}{(X+3)^3} + \frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}{(1+\frac{1}{2}X(1-\cos\theta))^3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{(\qquad)^3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$
$$f''(0) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2$$
$$= -\frac{2}{27} + 1 + \cos^2\theta$$
$$= \frac{25}{27}\left(1 + \frac{27}{25}\cos^2\theta\right)$$

これより、

$$f(X) \sim \frac{5}{3} - \frac{8}{9}X + \frac{1}{2}\frac{25}{27}\left(1+\frac{27}{25}\cos^2\theta\right)\cdot X^2$$
$$= \frac{5}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\frac{8}{9}X + \cancel{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{27}}\left(1+\frac{27}{25}\cos^2\theta\right)X^2\right)$$
$$= \frac{5}{3}\left(1 - \frac{8}{15}X + \frac{5}{18}\left(1+\frac{27}{25}\cos^2\theta\right)X^2\right)$$

No.
Date 5.29.

$$T = \frac{g^2}{m^2}\cdot\frac{5}{3}\left[1-\frac{8}{15}\left(\frac{s-4m^2}{m^2}\right)+\frac{5}{18}\left(1+\frac{27}{25}\cos^2\theta\right)\left(\frac{s-4m^2}{m^2}\right)^2\right]+O(g^4) \quad (11.42)$$

→ 等方的とわかる。

相対論的極限 $|\mathbf{k}_1| \gg m \Leftrightarrow s \gg m^2$ をとると、

$Y = \frac{m^2}{s}$ とおくと $s = \frac{m^2}{Y}$

$$T = g^2\left[\frac{1}{m^2-\frac{m^2}{Y}} + \frac{1}{m^2+\frac{1}{2}(\frac{m^2}{Y}-4m^2)(1-\cos\theta)} + \frac{1}{m^2+\frac{1}{2}(\frac{m^2}{Y}-4m^2)(1+\cos\theta)}\right]+O(g^4)$$

$$= \frac{g^2}{m^2}\Big[\underbrace{\frac{Y}{Y-1} + \frac{Y}{Y+\frac{1}{2}(1-4Y)(1-\cos\theta)} + \frac{Y}{Y+\frac{1}{2}(1-4Y)(1+\cos\theta)}}_{g(Y)\text{とおく.}}\Big]+O(g^4)$$

$g(0) = 0$

$$g'(Y) = \frac{Y-1-Y}{(Y-1)^2} + \frac{Y+\frac{1}{2}(1-4Y)(1-\cos\theta)-Y(1-4\frac{1}{2}(1-\cos\theta))}{(\quad)^2}$$

$+$ (↑で $\cos\theta$ を $-\cos\theta$ にしたもの)

$$= -\frac{1}{(Y-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}{(Y+\frac{1}{2}(1-4Y)(1-\cos\theta))^2} + \frac{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}{(Y+\frac{1}{2}(1-4Y)(1+\cos\theta))^2}$$

$$g'(0) = -1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)+1+\cos\theta+1-\cos\theta}{\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)} = \frac{3+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$g''(Y) = +\frac{2}{(Y-1)^3} + \frac{-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cdot 2}{(\quad)^3}\cdot(1-2(1-\cos\theta)) + (\cdots).$$

$$g''(0) = -2 + \frac{-2}{(\frac{1}{2}(1-\cos\theta))^2}(-1+2\cos\theta) + \frac{-2}{(\frac{1}{2}(1+\cos\theta))^2}(-1-2\cos\theta)$$

$$= \frac{-2\sin^4\theta - 8(-1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 - 8(-1-2\cos\theta)(1-\cos\theta)^2}{\sin^4\theta}$$

$$= \frac{-2\sin^4\theta + 8(1+\cancel{2\cos\theta}+\cos^2\theta-\cancel{2\cos\theta}-4\cos^2\theta-\cancel{2\cos^3\theta}) + 8(1-\cancel{2\cos\theta}+\cos^2\theta+\cancel{2\cos\theta}-4\cos^2\theta-\cancel{2\cos^3\theta})}{\sin^4\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^4\theta}\left(-2(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)+16(1-3\cos^2\theta)\right)$$

$$= -\frac{2}{\sin^4\theta}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta-8+24\cos^2\theta\right)$$

$$= -\frac{2}{\sin^4\theta}\left((\cos^2\theta+3)^2-16+(22-6)\cos^2\theta\right)$$

$$= -\frac{2}{\sin^4\theta}\left((3+\cos^2\theta)^2-16\sin^2\theta\right)$$

$$g(Y) \sim \frac{1}{\sin^2\theta}(3+\cos^2\theta)Y - \frac{1}{2}\frac{2}{\sin^4\theta}\left[(3+\cos^2\theta)^2-16\sin^2\theta\right]Y^2$$

$$= \frac{m^2}{s}\frac{1}{\sin^2\theta}\left[3+\cos\theta-\left(\frac{3+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-16\right)Y^2\right]$$

$$T \sim \frac{g^2}{\cancel{m^2}}\cdot\frac{\cancel{m^2}}{s}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\left[3+\cos\theta-\left(\frac{3+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-16\right)Y^2\right]$$

$$= \frac{g^2}{s\sin^2\theta}\left[3+\cos\theta-\left(\frac{3+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-16\right)Y^2\right] \quad (11.43)$$

前とうしろ($\theta=0$ と π)に鋭いピークをもつ。

No.

Date 5 . 29.

(11.39) : $\sigma = \frac{1}{S}\int_{t_{min}}^{t_{max}} dt \frac{d\sigma}{dt}$ から σ を計算する。(11.40) $t = -\frac{1}{2}(s-4m^2)(1-\cos\theta)$ より、$t_{min} = -(s-4m^2)$, $t_{max} = 0$

$$\left(\uparrow \; s = (E_1' + E_2')^2 = E_1'^2 + 2E_1'E_2' + E_2'^2 \geq m^2 + 2m^2 + m^2 = 4m^2 \right)$$

出ていく粒子は2つなので、$S = 2$.

$u = 4m^2 - s - t$ を用いて、s : fixで t 積分を行うと、

二本の2乗

$$\text{より}\left(\sigma = \frac{1}{2}\int_{t_{min}}^{t_{max}} dt \frac{1}{64\pi s |k_1|^2} |T|^2 \right. ☆$$

$$|T| = g^2\left[\frac{1}{m^2-s} + \frac{1}{m^2-t} + \frac{1}{m^2-u}\right] + O(g^4)$$

(11.2)から CM系で $|k_1| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 4m^2 s} = \frac{1}{2}\sqrt{s-4m^2}$

$$\sigma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64\pi s}\int_{-(s-4m^2)}^{0} dt\, 4 \cdot \frac{1}{s-4m^2}\left(g^2\left[\frac{1}{m^2-s} + \frac{1}{m^2-t} + \frac{1}{m^2-(4m^2-s-t)}\right] + O(g^4)\right)^2$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s(s-4m^2)}\int_{-(s-4m^2)}^{0} dt \left[\left(\frac{1}{m^2-s}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2-t}\right)^2 + \left(\frac{1}{-3m^2+s+t}\right)^2 + 2\frac{1}{m^2-s}\frac{1}{m^2-t} + 2\frac{1}{m^2-s}\frac{1}{-3m^2+s+t} + 2\underbrace{\frac{1}{m^2-t}\frac{1}{-3m^2+s+t}}_{\frac{1}{-2m^2+s}\left[\frac{1}{m^2-t} + \frac{1}{-3m^2+s+t}\right]}\right] + O(g^6)$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s(s-4m^2)}\left[\frac{t}{(m^2-s)^2} + \left(-\frac{-1}{m^2-t}\right) + \left(-\frac{1}{-3m^2+s+t}\right) + 2\frac{-1}{m^2-s}\log(m^2-t) + 2\frac{1}{m^2-s}\log(-3m^2+s+t) + 2\frac{1}{-2m^2+s}\left[-\log(m^2-t) + \log(-3m^2+s+t)\right]\right]_{-(s-4m^2)}^{0} + O(g^6)$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s(s-4m^2)}\left[\left\{\frac{s-4m^2}{(m^2-s)^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2+(s-4m^2)} - \frac{1}{-3m^2+s} + \frac{1}{-3m^2+s-s+4m^2}\right\} + 2\left[\left(\frac{-1}{m^2-s} + \frac{-1}{-2m^2+s}\right)\log(m^2-t) + 2\left(\frac{1}{m^2-s} + \frac{1}{-2m^2+s}\right)\log(-3m^2+s+t)\right]_{-(s-4m^2)}^{0}\right] + O(g^6)$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s(s-4m^2)}\left[\frac{s-4m^2}{(m^2-s)^2} + \frac{2}{m^2} - \frac{2}{s-3m^2} + 2\underbrace{\frac{m^2}{(m^2+s)(s-2m^2)}\left(\log\frac{-3m^2+s}{m^2} - \log\frac{-3m^2+s-s+4m^2}{m^2+s-4m^2}\right)}\right] + O(g^6)$$

$$\log\frac{-3m^2+s}{m^2} - \log\frac{m^2}{-3m^2+s} = 2\log\frac{s-3m^2}{m^2}$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s(s-4m^2)}\left[\frac{s-4m^2}{(m^2-s)^2} + \frac{2}{m^2} - \frac{2}{s-3m^2} + \frac{4m^2}{(s-m^2)(s-2m^2)}\log\frac{s-3m^2}{m^2}\right] + O(g^6)$$

(11.44)

☆はtで積分すれば　　No.　Date 6・5

非相対論的極限

(11.44)をまたTayler展開してもいいが、

☆の$|T|^2$に(11.42)のT^2を代入してみる(Tは1次まではθが出てこないので、(11.42)を代入してもいいはず!)

やる!

(11.42より)

$$\sigma = \frac{1}{64\pi s}\cdot 4^2\frac{1}{s-4m^2}\int_{-(s-4m^2)}^{0}\left(\frac{5g^2}{3m^2}\left(1-\frac{8}{15}\left(\frac{s-4m^2}{m^2}\right)\right)\right)^2$$

$$=\frac{g^4}{m^4\pi s(s-4m^2)}\cdot\frac{25}{32\cdot 9}\left[(s-4m^2)-2\cdot\frac{8}{15}\frac{(s-4m^2)^2}{m^2}\right]+o(g^6)$$

ここで、$\frac{s-4m^2}{m^2}=x \rightarrow s=(x+4)m^2 \rightarrow \frac{1}{s}=\frac{1}{(x+4)m^2}$

$$\rightarrow \frac{1}{s}\sim\frac{1}{4m^2}\left(1-\frac{x}{4}\right) \quad x\ll 1$$

$$\sigma\sim\frac{1}{\pi}\frac{g^4}{m^4}\cdot\frac{25}{32\cdot 9}\cdot\frac{1}{4m^2}\left(1-\frac{x}{4}\right)\left(1-\frac{16}{15}x\right)+o(g^6)$$

$$=\frac{25g^4}{1152\pi m^6}\left(1-\frac{79}{60}\left(\frac{s-4m^2}{m^2}\right)+\cdots\right)+o(g^6) \quad (11.45)$$

相対論的極限

$s\gg m$より、(11.44)をながめて、

$$\sigma\sim\frac{g^4}{32\pi s^2}\left(1+\frac{4m^2}{s}\right)\left[(s-4m^2)\frac{1}{s^2}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)^2+\frac{2}{m^2}-\frac{2}{s}\cdot\left(1+\frac{3m^2}{s}\right)\right.$$

$$\sim\frac{g^4}{32\pi s^2}\left(1+4\cdot\frac{m^2}{s}\right)\left(\frac{2}{m^2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{s}\right)+o(g^6)$$

$$=\frac{g^4}{32\pi s^2}\cdot\frac{2}{m^2}\left(1+4\cdot\frac{m^2}{s}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{s}\right)+o(g^6)$$

$$\sim\frac{g^4}{16\pi s^2\cdot m^2}\left(1+\left(4-\frac{1}{2}\right)\frac{m^2}{s}+\cdots\right)+o(g^6)$$

$$=\frac{g^4}{16\pi m^2 s^2}\left(1+\frac{7}{2}\cdot\frac{m^2}{s}+\cdots\right)+o(g^6) \quad (11.46)$$

これらの結果は実験で測定される微分断面積とよく一致している。

もとの話にもどる：1粒子→n'粒子（崩壊）について.
概念的な問題がある.
§5のLSZ公式では，各入射粒子と出ていく粒子は，正確なHamiltonianの正確な1粒子状態だった。
粒子が崩壊できる場合にはクリアではない.!

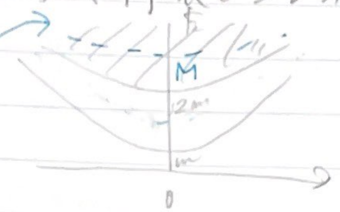

図5.1

図5.1で，崩壊する粒子は連続した閾値の上にないといけない
（の双曲線）

→ LSZ公式は使えない！

適切に理解するためには§25で扱うloop correctionsが必要
今はLSZが入射粒子が1つでも扱えるとしてやってみる！
(11.11)〜(11.20)の操作を行う
変わるのは，始状態についてのところだけで，

$$\langle i|i\rangle = 2E_1 V \qquad (11.47)$$

pを崩壊頻度(decay rate) $d\Gamma$でおいて，

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1}|\mathcal{T}|^2\, d\mathrm{LIPS}_{n'}(k_1) \qquad (11.48)$$

ここで，$s = -k_1^2 = m_1^2$
重心系では，$E_1 = m_1$
外の系では，$d\Gamma$の中の$\frac{E_1}{m_1}$の相対因子がdecay rateの相対的な時間ののびちぢみの変化に起因する。
全断面積は積分を実行して，
（出ていく粒子の運動量について）

$$\Gamma = \frac{1}{S}\int d\Gamma \qquad (11.49)$$

問11.1らしい。