43 The Path Integral for Fermion Fields

目標 フェルミオンの場の生成汎関数を求める

復習 **実スカラー場**

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \qquad (43.1)$$

生成汎関数は

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)} \qquad (43.3)$$

相関関数は.

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\cdots Z_0[J]\Big|_{J=0} \qquad (43.2)$$

プロパゲータは. Klein – Gordon op. の Green 関数.

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m^2-i\epsilon} \qquad (43.5)$$

$$\Rightarrow (-\partial_x^2 + m^2)\Delta(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \qquad (43.6)$$

これを用いると、生成汎関数は.

$$Z_0[J] = \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right] \qquad (43.4)$$

を得る. ただし $m^2 \to m^2 - i\epsilon$ のおきかえ (epsilon trick) を用いた.
(P60 の下 ~ P61 の上)

複素スカラー場

$$\mathcal{L}_0 = -\partial^\mu\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi$$

相関関数は、

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi^\dagger(y_1)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\dagger(x_1)}\cdots\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y_1)}\cdots\cdots Z_0[J^\dagger, J]\Big|_{J=J^\dagger=0} \qquad (43.8)$$

生成汎関数は、

$$Z_0[J^\dagger, J] = \int \mathcal{D}\varphi^\dagger\mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J^\dagger\varphi + \varphi^\dagger J)}$$

$$= \exp\left[i\int d^4x\,d^4y\, J^\dagger(x)\Delta(x-y)J(y)\right] \qquad (43.9)$$

フェルミオン場

場が反交換関係をみたすことを反映させるために、場と反交換する source $\eta(x)$ を導入する。

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\int d^4y\left[\bar\eta(y)\Psi(y)+\bar\Psi(y)\eta(y)\right] = -\int d^4y\,\bar\Psi(y)\frac{\delta\eta(y)}{\delta\eta(x)} = -\bar\Psi(x) \qquad (43.10)$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\int d^4y\left[\bar\eta(y)\Psi(y)+\bar\Psi(y)\eta(y)\right] = +\Psi(y) \qquad (43.11)$$

Dirac場

$$\mathcal{L}_0 = i\bar\Psi\partial\!\!\!/\Psi - m\bar\Psi\Psi \qquad (43.12)$$

について、(43.9) とのアナロジーで、相関関数と生成汎関数を。

$\frac{\delta}{\delta\eta}$で叩いたときに、(43.10) より − がでてくるので $\frac{1}{i}$ でなく i とした。

$$\langle 0|T\,\Psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\bar\Psi_{\beta_1}(y_1)\cdots|0\rangle$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta_{\alpha_1}(x_1)}\cdots\, \underline{\underline{i}}\frac{\delta}{\delta\eta_{\beta_1}(y_1)}\cdots Z_0(\bar\eta,\eta)\Big|_{\eta=\bar\eta=0} \qquad (43.13)$$

$$Z_0[\bar\eta,\eta] = \int\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar\Psi\, e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_0+\bar\eta\Psi+\bar\Psi\eta)}$$

$$= \exp\left[i\int d^4x\,d^4y\,\bar\eta(x)S(x-y)\eta(y)\right] \qquad (43.14)$$

とかく。ここで Feynman プロパゲーター

$$S(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(-p\!\!\!/+m)e^{ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon} \qquad (43.15)$$

は、Dirac op. の Green 関数。

$$(-i\partial\!\!\!/_x+m)S(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \qquad (43.16)$$

これら (43.13)〜(43.16) はアナロジーで導いたが、§42 で導いた、(42.11) を導く。

実際、

$$\langle 0|T\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)|0\rangle \underset{(43.13)}{=} \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\, i\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)} Z_0[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$\underset{(43.14)}{=} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)}\exp\left[i\int d^4x' d^4y'\,\bar{\eta}(x')S(x-y)\eta(y')\right]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

通りぬけるときに -1

$$= -iS(x-y)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{i}S(x-y) \qquad (42.11)$$

となり §42 の結果を導く。

復習

$\mathcal{L}_1(\varphi^\dagger,\varphi)$ で相互作用する、複素スカラー場の場合。

$$Z[J^\dagger,J] \propto \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)},\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}\right)\right] Z_0[J^\dagger,J] \qquad (43.17)$$

規格化

$$Z[0,0]=1$$

これとのアナロジーで $\mathcal{L}_1(\bar{\Psi},\Psi)$ で相互作用する Dirac 場では、

$$Z[\bar{\eta},\eta] \propto \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_1\left(i\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\right] Z_0[\bar{\eta},\eta] \qquad (43.18)$$

規格化

$$Z[0,0]=1$$

この $Z[\bar{\eta},\eta]$ で (43.13) の $Z_0[\bar{\eta},\eta]$ を置き換えたものが、相互作用のある場合の vacuum excitation

スピノルの添字や、反交換関係についての詳細は §45 で

Majorana 場

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2}\Psi^T C \not\partial \Psi - \frac{1}{2} m \Psi^T C \Psi \qquad (43.19)$$

(43.2) とのアナロジーで

$$\langle 0 | T \Psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots | 0 \rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \eta_{\alpha_1}(x_1)} \cdots Z_0(\eta) \Big|_{\eta=0} \qquad (43.20)$$

$$Z_0[\eta] = \int \mathcal{D}\Psi \, e^{i\int d^4x (\mathcal{L}_0 + \eta^T \Psi)}$$

$$= \exp\left[\underline{\underline{-}} \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \, \eta^T(x) S(x-y) C^{-1} \eta(y) \right] \qquad (43.21)$$

(43.20) で i でなく $\frac{1}{i}$ から来てる.

Feynman propagator $S(x-y)C^{-1}$ は、Majorana op. $C(-i\not\partial + m)$ の Green 関数.

$$C(-i\not\partial_x + m) S(x-y) C^{-1} = \delta^{(4)}(x-y) \qquad (43.22)$$