34 Left-and right-handed spinor fields

目標：2成分スピノルのLorentz変換や場の対称成分への分解を定式化する

Lorentz変換の行列

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$，一般の$\Lambda$に対して $U(\Lambda)^{-1}\psi_a(x)U(\Lambda) = L_a{}^{b}(\Lambda)\psi_b(\Lambda^{-1}x)$

という(2,1)スピノルを変換する行列 $L_a{}^{b}(\Lambda)$ を考える，

$L_a{}^{b}(\Lambda')L_b{}^{c}(\Lambda) = L_a{}^{c}(\Lambda'\Lambda)$ という結合則を満たす，

無限小変換に対して，$L_a{}^{b}(1+\delta\omega) = \delta_a{}^{b} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a{}^{b}$，$\delta\omega_{\nu\mu} = -\delta\omega_{\mu\nu}$ より，

$(S_L^{\mu\nu})_a{}^{b} = -(S_L^{\nu\mu})_a{}^{b}$ となる行列を導入する，

2章の$M^{\mu\nu}$と同様の交換関係 $[S_L^{\mu\nu}, S_L^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}S_L^{\nu\sigma} - (\mu\leftrightarrow\nu)) - (\rho\leftrightarrow\sigma)$ (A)

$U(1+\delta\omega) = I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ より，

$(I - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\psi_a(x)(I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) = (\delta_a{}^{b} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a{}^{b})\psi_b(x^{\mu} - \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})$

$\psi_a(x) + \frac{i}{2}[\psi_a(x), M^{\mu\nu}]\delta\omega_{\mu\nu} = (\delta_a{}^{b} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a{}^{b})(\psi_b(x) - x^{\nu}\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\mu}\psi_b(x))$

$= \psi_a(x) - x^{\nu}\partial^{\mu}\delta\omega_{\mu\nu}\psi_a(x) + \frac{i}{2}(S_L^{\mu\nu})_a{}^{b}\psi_b(x)\delta\omega_{\mu\nu}$，

$x^\nu \partial^\mu \delta\omega_{\mu\nu} = x^\mu \partial^\nu \delta\omega_{\mu\nu}$ より, $[\psi_a(x), M^{\mu\nu}] = \underbrace{\frac{1}{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)}_{L^{\mu\nu}} \psi_a(x) + (S_L^{\mu\nu})_a{}^b \psi_b(x)$,

第1項はスカラー量としての変換から出てくるもので, ここでは関心がない.

以下, $x^\mu = 0$ を考えることでこの項を消す. $[\psi_a(0), M^{\mu\nu}] = (S_L^{\mu\nu})_a{}^b \psi_b(0)$,

$J_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M^{ij}$ より, $M^{ij} = \epsilon_{ijk} J_k$, $\epsilon_{ijk}[\psi_a(0), J_k] = (S_L^{\mu\nu})_a{}^b \psi_b(0)$,

$S_L^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \sigma_k$ とする.

$K_k = M^{k0}$, $N_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$ は (2,1) 表現の場では 0 となる(?) ので,

$K_k = iJ_k$, $i\epsilon_{ijk}[\psi_a(0), J_k] = \epsilon_{ijk}[\psi_a(0), K_k] = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k = \epsilon_{ijk}[\psi_a(0), M^{k0}]$

$= \epsilon_{ijk}(S_L^{k0})_a{}^b \psi_b(0)$,

$$\Rightarrow S_L^{k0} = \frac{i}{2}\sigma_k, \quad S_L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}\sigma_1 & -\frac{i}{2}\sigma_2 & -\frac{i}{2}\sigma_3 \\ \frac{i}{2}\sigma_1 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_3 & -\frac{1}{2}\sigma_2 \\ \frac{i}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\sigma_3 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_1 \\ \frac{i}{2}\sigma_3 & \frac{1}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

(2,1) スピノルのエルミート共役は (1,2) スピノル. (1,2) のものを $\dot{a}$ で区別する.

$[\psi_a(x)]^\dagger = \psi^\dagger_{\dot{a}}(x)$, これに対し, $U(\Lambda)^{-1}\psi^\dagger_{\dot{a}}(x)U(\Lambda) = R_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}(\Lambda)\psi_{\dot{b}}(\Lambda^{-1}x)$,

$R_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}(\Lambda)$ に対して $(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}$ を考え, 同様の議論から, $[\psi^\dagger_{\dot{a}}(0), M^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \psi^\dagger_{\dot{b}}(0)$,

$[\psi_{\dot{a}}^{\dagger}(0), M^{\mu\nu}]^{\dagger} = (M^{\mu\nu}\psi_a(0) - \psi_a(0)M^{\mu\nu}) = -[\psi_a(0), M^{\mu\nu}] = -(S_L{}^{\mu\nu})_a{}^b\psi_b(0)$,

よって、$[(S_R{}^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}]^* = -(S_L{}^{\mu\nu})_a{}^b$,

$$S_R{}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}\sigma_1 & \frac{i}{2}\sigma_2 & -\frac{i}{2}\sigma_3 \\ \frac{i}{2}\sigma_1 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_3 & -\frac{1}{2}\sigma_2 \\ -\frac{i}{2}\sigma_2 & \frac{1}{2}\sigma_3 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_1 \\ \frac{i}{2}\sigma_3 & \frac{1}{2}\sigma_2 & \frac{1}{2}\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

2つの(2,1)スピノルを持つ場 $C_{ab}(x)$ を考える、

$U(\Lambda)^{-1}C_{ab}(x)U(\Lambda) = L_a{}^c(\Lambda)L_b{}^d(\Lambda)C_{cd}(\Lambda^{-1}x)$,

量子力学の2つの$\frac{1}{2}$スピンの合成にて、

$$a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle = \frac{b-c}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) + a|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{b+c}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + d|\downarrow\downarrow\rangle,$$

つまり、1つの反対称成分と3つの対称成分に分解でき、

同じことが(2,1)スピノルの合成にもいえる、これを $(2,1)\otimes(2,1) = (1,1)_A \oplus (3,1)_S$ と表記する、

このとき、これに対応し、$\underbrace{C_{ab}(x)}_{\text{自由度4}} = \underbrace{\varepsilon_{ab}D(x)}_{\text{自由度1}} + \underbrace{G_{ab}(x)}_{\text{自由度3}}$, $G_{ab}(x) = G_{ba}(x)$,

$L_a{}^c(\Lambda)L_b{}^d(\Lambda)C_{cd}(\Lambda^{-1}x) = L_a{}^c(\Lambda)L_b{}^d(\Lambda)\varepsilon_{cd}D(\Lambda^{-1}x) + \cdots = \varepsilon_{ab}D(\Lambda^{-1}x) + \cdots$ より、

$L_a{}^c(\Lambda)L_b{}^d(\Lambda)\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{ab}$,

以下、$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする、これは $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ 同様添え字の上げ下げとして機能する、

$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_a{}^c$, $\varepsilon^{ab}\varepsilon_{bc} = \delta^a{}_c$,

$\psi^a(x) = \varepsilon^{ab}\psi_b(x)$ は添え字の上昇、 $\psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b = \varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc}\psi_c = \delta_a{}^c\psi_c$,

ただし、$\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$ の反対称性から、1番の添え字で和を取るときは -1 倍となる,

$\chi^a = \varepsilon^{ab}\chi_b = -\varepsilon^{ba}\chi_b = -\chi_b\varepsilon^{ba} = \chi_b\varepsilon^{ab}$,

$\psi^a\chi_a = \varepsilon^{ab}\psi_b\chi_a = -\varepsilon^{ba}\psi_b\chi_a = -\psi_b\chi^b$, 詳しくは35章

$(1,2)\otimes(1,2) = (1,1)_A + (1,3)_S$ より, $\varepsilon^{\dot a\dot b}$, $\varepsilon_{\dot a\dot b}$ も全く同様に考えることができる,

$(2,1)$ と $(1,2)$ のスピノルを持つ場 $A_{a\dot a}(x)$ は $(2,2)$ の表現であり, これはベクトル場と結びつけられ,

$A_{a\dot a}(x) = \sigma^\mu_{a\dot a}A_\mu(x)$ のように A^μ を $A_{a\dot a}$ へと移す,

定数 $\sigma^\mu_{a\dot a}$ は $(2,1)\otimes(1,2)\otimes(2,2) = (1,1)\oplus\cdots$ の関係から出る,

$\sigma^\mu_{a\dot a} = (I, \vec\sigma) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ とするのが慣例, 詳しくは35章

同様に, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ は $(2,2)\otimes(2,2) = (1,1)_S \oplus (1,3)_A \oplus (3,1)_A + (3,3)_S$ から,

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $(2,2)\otimes(2,2)\oplus(2,2)\otimes(2,2) = (1,1)_A + \cdots$ から出る,

$\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}$ から, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$

つまり Lorentz 変換しても同様の反対称性を持つ, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ の定数倍, $\det\Lambda = 1$ より $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は定数

二つのベクトル成分を持つ場 $B^{\mu\nu}(x)$ の分解を考える。

$(2,2)\otimes(2,2)=(1,1)_S\oplus(1,3)_A\oplus(3,1)_A+(3,3)_S$ に対応して、

$$\underbrace{B^{\mu\nu}(x)}_{\text{自由度}16}=\underbrace{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}T(x)}_{\text{自由度}1}+\underbrace{A^{\mu\nu}(x)}_{\text{自由度}6}+\underbrace{S^{\mu\nu}(x)}_{\text{自由度}9},\quad A^{\mu\nu}(x)=-A^{\nu\mu}(x),\ g_{\mu\nu}S^{\mu\nu}(x)=0$$

$A^{\mu\nu}(x)$ を $(1,3)_A$, $(3,1)_A$ に対応するようにさらに分解したい。

$(3,1)_A$ には $\left(|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle\right)$ に対応して $G_{ab}(x)=G_{ba}(x)$,

$(1,3)_A$ には $G^\dagger_{\dot a\dot b}(x)=G^\dagger_{\dot b\dot a}(x)$ が対応する。

$$S_{L\rho\sigma}=\begin{pmatrix}0 & \frac{i}{2}\sigma_1 & \frac{i}{2}\sigma_2 & \frac{i}{2}\sigma_3\\ -\frac{i}{2}\sigma_1 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_3 & -\frac{1}{2}\sigma_2\\ -\frac{i}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\sigma_3 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_1\\ -\frac{i}{2}\sigma_3 & \frac{1}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\sigma_1 & 0\end{pmatrix},\quad S_{R\rho\sigma}=\begin{pmatrix}0 & \frac{i}{2}\sigma_1 & -\frac{i}{2}\sigma_2 & \frac{i}{2}\sigma_3\\ -\frac{i}{2}\sigma_1 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_3 & -\frac{1}{2}\sigma_2\\ \frac{i}{2}\sigma_2 & \frac{1}{2}\sigma_3 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_1\\ -\frac{i}{2}\sigma_3 & \frac{1}{2}\sigma_2 & \frac{1}{2}\sigma_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad (S_L{}^{\mu\nu})_a{}^b=-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(S_{L\rho\sigma})_a{}^b,\qquad (S_R{}^{\mu\nu})_{\dot a}{}^{\dot b}=\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(S_{R\rho\sigma})_{\dot a}{}^{\dot b}$$

$G^{\mu\nu}(x)\equiv(S_L{}^{\mu\nu})^{ab}G_{ab}(x)$ とする。

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$ より、$(S_L{}^{\mu\nu})_{ab}=(S_L{}^{\mu\nu})_{ba}$, etc.

$$-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}(x)=-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(S_{L\rho\sigma})^{ab}G_{ab}(x)=(S_L{}^{\mu\nu})^{ab}G_{ab}(x)=G^{\mu\nu}(x)$$ ：自己相対

同様に、$G^{\dagger\mu\nu}(x)=-(S_R{}^{\mu\nu})^{\dot a\dot b}G^\dagger_{\dot a\dot b}(x)$ は $G^{\dagger\mu\nu}(x)=\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^\dagger_{\rho\sigma}(x)$

反自己双対

$G^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}A^{\mu\nu}(x) - \frac{\hat{c}}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x)$, $G^{\dagger\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}A^{\mu\nu}(x) + \frac{\hat{c}}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x)$ は

$A^{\mu\nu}(x) = G^{\mu\nu}(x) + G^{\dagger\mu\nu}(x)$ で、 $-\frac{\hat{c}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}(x) = -\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}A^{\alpha\beta}(x) - \frac{\hat{c}}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x)$,

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\alpha)$ (B) より、

$$-\frac{\hat{c}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}(x) = \frac{1}{4}(A^{\mu\nu}(x) - A^{\nu\mu}(x)) - \frac{\hat{c}}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x)$$

$$= \frac{1}{2}A^{\mu\nu}(x) - \frac{\hat{c}}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}(x) = G^{\mu\nu}(x),$$

同様にして、 $\frac{\hat{c}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^{\dagger}_{\rho\sigma}(x) = G^{\dagger\mu\nu}(x)$, よって、

$B^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}T(x) + G^{\mu\nu}(x) + G^{\dagger\mu\nu}(x) + S^{\mu\nu}(x)$ と

$(1,1)_S \oplus (3,1)_A \oplus (1,3)_A \oplus (3,3)_S$ に対応して分解できた。

(A) Problem 2.8, 2.9 が参考らしい, 加筆できたらします

(B) $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, μ, ν, ρ, σ のどれかは 0 (でなければ $g_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$),
他 3つが 1, 2, 3,

よって、$g_{\mu\alpha} \sim g_{\sigma\delta}$ は $g_{\mu\mu} \sim g_{\sigma\sigma}$ のいずれか1つが -1, 他 3つが $+1$,

従って、$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$,

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ で、(μ, ν) が (α, β) に一致し, ρ, σ は2通りの組合わせがあり、

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\alpha)$$