31 Broken symmetry and loop corrections.

目標 φ^4 theory で $m^2>0$ の c.t. が $m^2<0$ の c.t. にもなっていることを見る。(具体的に Z c.t. を求めて確める)

φ^4 theory で考える。

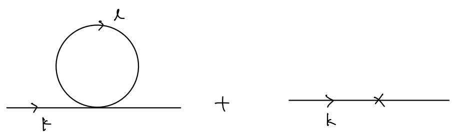
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \varphi^4$$

(I) $m^2>0$ の場合

Z_φ, Z_m, Z_λ を計算したい。$d=4-\epsilon$ 次元で考えて、λ を無次元に保つために、$\lambda \to \lambda \tilde{\mu}^\epsilon$ とする。

(I-1) propagator correction

$O(\lambda)$ までの correction は、



$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2}(-i\lambda\tilde{\mu}^\epsilon)\frac{1}{i}\Delta(0) - i(\underbrace{A}_{Z_\varphi - 1} k^2 + \underbrace{B}_{Z_m - 1} m^2) \quad \text{at } O(\lambda) \qquad (31.2)$$

ただし $\Delta(0) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2+m^2}$ (31.3) であり、§14 と同様にすると、

$$\tilde{\mu}^\epsilon \Delta(0) = \frac{-i}{(4\pi)^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right] m^2 \qquad (31.4)$$

ただし $\mu^2 = 4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2$ であり $\gamma = \gamma(\lambda)$: 異常次元。

$$\Rightarrow \Pi(k^2) = \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right] m^2 - Ak^2 - Bm^2 \quad \text{at } O(\lambda) \qquad (31.5)$$

よって (31.2) で c.t. が self-energy の発散部を打ち消すようにすると、

$$A = O(\lambda^2) \qquad (31.6)$$

$$B = \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + R_B\right] + O(\lambda^2) \qquad (31.7)$$

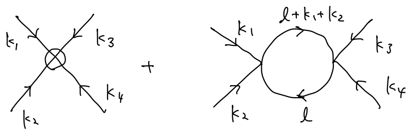
λの任意のオーダーで成り立つ式。

R_B: finite constant (which may depend on μ)

$\overline{MS}$ では．$k_B = 0$ (27.3) だが．ここでは そのまま 残しておく．

(I-2) vertex correction

$O(\lambda^2)$ までの correction は．



$+ \ (k_2 \leftrightarrow k_3) \ + \ (k_2 \leftrightarrow k_4)$

$$i V_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i \underbrace{Z_\lambda}_{1+C} \lambda + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[iF(-s) + iF(-t) + iF(-u) \right]$$

$$+ O(\lambda^3) \qquad (31.8)$$

ここで

$$iF(k^2) \equiv \tilde{\mu}^\epsilon \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{((\ell + k)^2 + m^2)(\ell^2 + m^2)}$$

$$= \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \int_0^1 dx \ln\left(\frac{\mu^2}{D}\right) \right] \qquad (31.9)$$

$$D = x(1-x)k^2 + m^2$$

(31.8) で $Z_\lambda = 1 + C$ を代入して c.t. が vertex correction の発散部を打ち消すようにすると．

$$\Rightarrow \quad C = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \underbrace{k_C}_{\text{finite constant.}} \right) + O(\lambda^2) \qquad (31.10)$$

(I-3) $\beta(\lambda) = \dfrac{d\lambda}{d \ln \mu}$ の 計算

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \varphi^4$$

より $\overline{MS}$ では．

$$\begin{cases} \varphi_0 = Z_\varphi^{1/2} \varphi \\ \lambda_0 = Z_\lambda Z_\varphi^{-2} \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \end{cases} \qquad (31.11)$$

であり、

$$\ln(Z_\lambda Z_\varphi^{-2}) \overset{\text{def}}{\equiv} \underbrace{\frac{3\lambda}{16\pi^2}}_{L_1(\lambda)\,(\Leftarrow\ \S 28\text{ の } G_1 \text{ に対応})} \frac{1}{\epsilon} + O(\lambda^2) \qquad (31.12)$$

c.f. (28.14)
(28.15)

(28.21) と同様にすると $\beta(\lambda) = \lambda^2 L_1'(\lambda)$ より、

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3) \qquad (31.13)$$

$\beta(\lambda)$ の係数が正なので、高エネルギー極限ほど coupling が強くなる。

(II) $m^2 < 0$ の場合。

§30 に倣って $\varphi(x) = \rho(x) + v$ と分けると、$\mathcal{L}$ は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} Z_\lambda - \frac{1}{2} Z_m\right) m^2 \rho^2 \qquad \Leftarrow \rho \text{ の propagator}$$

$$+ \frac{1}{2}(Z_m - Z_\lambda)\left(\frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon}\right)^{1/2} m_\rho^3 \rho \qquad \Leftarrow \rho \text{ の 1点 vertex}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{3!} Z_\lambda (3\lambda\tilde{\mu}^\epsilon)^{1/2} m_\rho \rho^3}_{\Uparrow\ \rho \text{ の 3点 vertex}} - \underbrace{\frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \rho^4}_{\Uparrow\ \rho \text{ の 4点 vertex}} \qquad (31.14)$$

ただし

$$m_\rho^2 = 2|m^2| \qquad v = \left(\frac{6|m|^2}{\lambda}\right)^{1/2} \qquad \lambda \longrightarrow \lambda \tilde{\mu}^\epsilon$$

(II-1) ρ の真空期待値について。

(31.14) の $\mathcal{L}$ より、

- ρ の 3点 vertex $\quad -iZ_\lambda g_3 \quad : \quad g_3 = (3\lambda\tilde{\mu}^\epsilon)^{1/2} m_\rho \qquad (31.15)$
- 〃 1点 〃 $\quad iY \quad : \quad Y = \frac{1}{2}(Z_m - Z_\lambda)\left(\frac{3}{\lambda\tilde{\mu}^\epsilon}\right)^{1/2} m_\rho^3 \qquad (31.16)$

$$\overset{(9.19)}{\Rightarrow} \quad \langle 0|\rho(x)|0\rangle = \underbrace{\left(iY + \frac{1}{2}(-iZ_\lambda g_3)\frac{1}{i}\Delta(0)\right)}_{①} \times \int d^4y \, \frac{1}{i}\Delta(x-y) \quad \text{at } O(\lambda) \qquad (31.17)$$

$$\tilde{\mu}^\epsilon \times ① \overset{\substack{(31.4)\\(31.15)\\(31.16)}}{=\!=} \frac{i}{2}\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{1/2} m_\rho^3 \underbrace{\left(Z_m - Z_\lambda + \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln\frac{\mu^2}{m_\rho^2}\right] + O(\lambda^2)\right)}_{②} \qquad (31.18)$$

$$② \overset{\substack{Z_m = 1+B\\ Z_\lambda = 1+C\\ (31.7)\\(31.10)}}{=\!=} \frac{\lambda}{16\pi^2}\left[k_B - 3k_C + 1 + \ln\frac{\mu^2}{m_\rho^2}\right] \qquad (31.19)$$

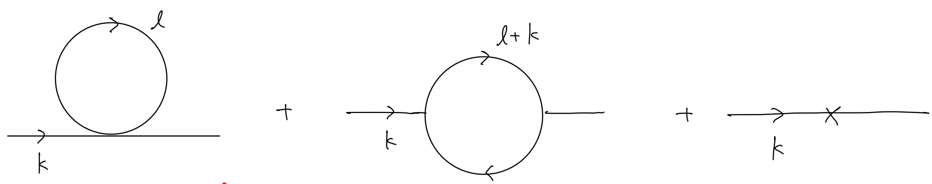
発散を引き起こす $\frac{1}{\epsilon}$ の部分は cancel された。

($m^2>0$ の c.t. が $m^2<0$ の場合も c.t. として機能している)

$$k_B - 3k_C = -1 - \ln\frac{\mu^2}{m_\rho^2} \qquad (31.20)$$

とすると真空期待値は 0 になる。

(II-2) ρ の propagator について。



(31.2) で $m^2 \to m_\rho^2$ (31.9) (31.21)

$O(\lambda)$ までの correction は上図

(31.14) の $\mathcal{L}$ より. counter term $-iX$ は

$$X = \underbrace{A}_{Z_\varphi - 1} k^2 + \left(\frac{3}{2}\underbrace{C}_{Z_\lambda - 1} - \frac{1}{2}\underbrace{B}_{Z_m - 1}\right) m_\rho^2$$

となり、上図の対応関係を使って、

$$\Pi(k^2) = -\frac{1}{2}(\lambda\tilde{\mu}^{\epsilon})\frac{1}{i}\Delta(0) + \frac{1}{2}g_3^2 F(k^2) - X + O(\lambda^2)$$

$$\overset{\substack{(31.2)\\(31.4)\\(31.9)\\(31.21)}}{=} \frac{\lambda}{32\pi^2}m_\rho^2\left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln\frac{\mu^2}{m_\rho^2}\right]$$

$$+ \frac{3\lambda}{32\pi^2}m_\rho^2\left[\frac{2}{\epsilon} + \int_0^1 dx \ln\left(\frac{\mu^2}{D}\right)\right]$$

$$-Ak^2 - \left(\frac{3}{2}C - \frac{1}{2}B\right)m_\rho^2 + O(\lambda^2) \qquad (31.22)$$

$$\overset{\substack{(31.7)\\(31.10)}}{=} \frac{\lambda}{32\pi^2}m_\rho^2\left[1 + \ln\frac{\mu^2}{m_\rho^2} + 3\int_0^1 dx \ln\frac{\mu^2}{D} - (9\kappa_C - \kappa_B)\right] - Ak^2 + O(\lambda^2) \qquad (31.23)$$

OS で考えると、

$$\begin{cases} \Pi(-m_\rho^2) = 0 \\ \Pi'(-m_\rho^2) = 0 \end{cases}$$

が要求される $\Pi(k^2)$ は D を通いて k^2 依存性を持つ

A を上手いこと調整して、$\Pi'(-m_\rho^2) = 0$ とし、次に

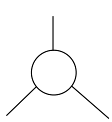
$9\kappa_C - \kappa_B$ を調整して $\Pi(-m_\rho^2) = 0$ とする。

$\Rightarrow$ $O(\lambda)$ で κ_B, κ_C が決まる。

(III-3) ρ の 3点 vertex への one loop correction について、

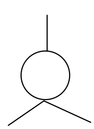
$O(\lambda)$ で今まで決めた counter term により、発散が cancel されていることを見る。

発散するものにしか興味がないので、発散するものを考える。



$\Rightarrow D = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 < 0$

$\Rightarrow$ 発散ナシ



$D = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 0$

$\Rightarrow$ 発散。

$$i\mathbb{V}_3(k_1,k_2,k_3)_{div} = -iZ_\lambda g_3 + \frac{1}{2}(-i\lambda)(-ig_3)\left(\frac{1}{i}\right)^2\left[iF(k_1^2) + iF(k_2^2) + iF(k_3^2)\right] + O(\lambda^{5/2}) \qquad (31.24)$$

divergent part

$$\overset{(31.9)}{=} -g_3\left(1 + C - \frac{3\lambda}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon} + O(\lambda^2)\right) \qquad (31.25)$$

C に (31.10) を代入すると、$\frac{1}{\epsilon}$ の発散項が cancel し、確かに有限になっていると分かる。($m^2>0$ の c.t. が $m^2<0$ の場合も c.t. として機能している)

(Ⅲ-4) ρ の4点 vertex の one loop correction について。

fig 13.2 の場合と全く同じなので省略。

まとめ

$m^2>0$ (Z_2 sym. unbroken) で求めた counter term の divergent part は、
$m^2<0$ (〃 spontaneously broken) の場合にも counter term として機能し、
diagram の発散を打ち消す。

行間の補足

(31.12) ∵) $\ln(Z_\lambda Z_\varphi^{-2}) = \ln Z_\lambda - 2\ln Z_\varphi$

$$\overset{(31.6)}{\underset{(31.10)}{=}} \ln\left(1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + \kappa_c\right) + O(\lambda^2)\right) - 2\ln\left(1 + O(\lambda^2)\right)$$

$$\overset{\text{taylor exp.}}{\simeq} \frac{3\lambda}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + \kappa_c\right) + O(\lambda^2) \qquad (31.12)$$

//

?

(31.14) ∵)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\varphi\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}Z_m m^2\varphi^2 - \frac{1}{24}Z_\lambda\lambda\varphi^4$$

$$\overset{\varphi(x)=\rho(x)+v}{=} -\frac{1}{2}Z_\varphi\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \frac{1}{2}Z_m m^2(\rho+v)^2 - \frac{1}{24}Z_\lambda\lambda(\rho+v)^4$$

$$\overset{m_\rho^2 = 2|m|^2 = -2m^2}{=} \quad 〃 \quad + \frac{1}{4}Z_m m_\rho^2(\rho^2 + 2\rho v + v^2) - \frac{1}{24}Z_\lambda\lambda(\rho^4 + 4\rho^3 v + 6\rho^2 v^2 + 4\rho v^3 + v^4)$$

$$v = \left(\frac{6|m|^2}{\lambda}\right)^{1/2} = \left(\frac{3m_\rho^2}{\lambda}\right)^{1/2}$$

$$\& \quad \lambda \to \lambda\tilde{\mu}^{\epsilon}$$

$$= \quad " \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{4}Z_m - \frac{3}{4}Z_\lambda\right) m_\rho^2 \rho^2}_{\text{o.k.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(Z_m - Z_\lambda)\left(\frac{3}{\lambda\tilde{\mu}^{\epsilon}}\right)^{1/2} m_\rho^3 \rho}_{\text{o.k.}}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{6}Z_\lambda(3\lambda\tilde{\mu}^{\epsilon})^{1/2} m_\rho \rho^3}_{\text{o.k.}} \underbrace{- \frac{1}{24}Z_\lambda\lambda\tilde{\mu}^{\epsilon}\rho^4}_{\text{o.k.}} \quad " \qquad (31.14)$$