§28 The Renormalization Group

目標：　§27では観測量がμに依存しないようにして
$\overline{MS}$ 繰り込みスキームを導入した

→ §28では場とパラメータがμに依存しないようにして、議論を再構成する.

Def　繰り込み群の方程式

Lagrangeanのパラメータや、相関関数のような直接観測できない量の、μ依存性を表す方程式

Lagrangeanを $d=6-\varepsilon$ 次元で2通りの表し方とすると、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{1}{6} Z_g g \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} \varphi^3 + Y\varphi \tag{28.1}$$

（∵ (9.1)(14.29)）
（場とパラメータは $\mu = \sqrt{4\pi} e^{-\gamma/2} \tilde{\mu}$ として $\overline{MS}$ スキームを用いることで繰り込まれている）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{6} g_0 \varphi_0^3 + Y_0 \varphi_0 \tag{28.2}$$

(28.1)(28.2)の比較より、

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = Z_\varphi^{1/2} \varphi(x) \\ m_0 = Z_\varphi^{-1/2} Z_m^{1/2} m \\ g_0 = Z_\varphi^{-3/2} Z_g g \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} \\ Y_0 = Z_\varphi^{-1/2} Y \end{cases} \tag{28.3〜28.6}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき $\frac{1}{\varepsilon}$ の項から発散が表れるので、その発散をZに入れ込めばよい

⇒
$$\begin{cases} Z_\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \\ Z_m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \\ Z_g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \end{cases} \tag{28.7〜28.9}$$

$(\alpha = g^2/(4\pi)^3)$

(27.3)より $A = Z_\varphi - 1 = -\frac{1}{6}\frac{\alpha}{\varepsilon} + O(\alpha^2)$

$B = Z_m - 1 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} + O(\alpha^2)$

としたので、

$$a_1 = -\frac{\alpha}{6} + O(\alpha^2)$$

$$b_1 = -\alpha + O(\alpha^2)$$

また(16.9)より

$$V_3/g = Z_g + \frac{\alpha}{\varepsilon} + \int dF_3 \ln\frac{\mu^2}{D} + O(\alpha^2)$$

(27.18)より

$$V_3/g = 1 - \int dF_3 \ln\frac{D}{\mu^2} + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow Z_g = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + O(\alpha^2)$$

$$c_1 = -\alpha + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{\alpha}{6} + O(\alpha^2) \\ b_1 = -\alpha + O(\alpha^2) \\ c_1 = -\alpha + O(\alpha^2) \end{cases} \qquad (28.10 \sim 28.12)$$

また

$$a_n, b_n, c_n = O(\alpha^2) \quad (n \geq 2)$$

次にαのβ関数や、mの異常次元の計算のためのtrickを用いる

要請：裸のパラメータや場(φ_0等)はμに独立でなければならない

(∵ μは発散を取り除く計算の際に、計算の補助で導入したパラメータ
つまり、μなしでも散乱振幅を計算できるため、
場やパラメータはμに依存しない)

初めにg_0について考える。

(14.31) $\alpha \equiv \frac{g^2}{(4\pi)^3}$ と同様に

$$\alpha_0 \equiv \frac{g_0^2}{(4\pi)^3} \qquad (28.13)$$

$$= Z_g^2 Z_\varphi^{-3} \tilde{\mu}^{\varepsilon} \alpha$$

を導入する。

$$G(\alpha,\varepsilon) \equiv \ln\left(Z_g^{2} Z_\varphi^{-3}\right) \qquad (28.14)$$

に、(28.7)(28.9)を用いて、

$$G(\alpha,\varepsilon) = 2\ln\left(1+\sum\frac{c_n}{\varepsilon^n}\right) - 3\ln\left(1+\sum\frac{a_n}{\varepsilon^n}\right)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum\frac{c_n}{\varepsilon^n}\right)^k\right) - 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum\frac{a_n}{\varepsilon^n}\right)^k\right)$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \qquad (28.15)$$

$$G_1(\alpha) = 2c_1 - 3a_1 = -\frac{3}{2}\alpha + O(\alpha^2) \qquad (28.16)$$

この$G(\alpha,\varepsilon)$を用いて、(28.13)のlogをとって、

$$\ln\alpha_0 = G(\alpha,\varepsilon) + \ln\alpha + \varepsilon\ln\tilde{\mu} \qquad (28.17)$$

α_0がμに独立なので、(28.17)を$\ln\mu$で微分して

$$0 = \frac{d}{d(\ln\mu)}\ln\alpha_0$$

$$= \frac{dG(\alpha,\varepsilon)}{d(\ln\mu)} + \frac{d(\ln\alpha)}{d(\ln\mu)} + \varepsilon\frac{d(\ln\tilde{\mu})}{d(\ln\mu)}$$

$$= \left(\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} + \varepsilon \qquad (28.18)$$

$$\left(\tilde{\mu}\propto\mu \text{ より } \frac{d(\ln\tilde{\mu})}{d(\ln\mu)} = 1\right)$$

$$\underset{(28.15)}{\Rightarrow} 0 = \left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(\alpha)}{\varepsilon^n}\right)\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} + \varepsilon\alpha$$

$$= \left(1+\frac{\alpha G_1'}{\varepsilon} + \frac{\alpha G_2'}{\varepsilon^2} + \cdots\right)\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} + \varepsilon\alpha \qquad (28.19)$$

ここで$\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)}$は、$\ln\mu$の微小変化に対する$\alpha$の補正の割合なので、$\varepsilon\to0$で有限になるよう要請すると、

$$\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} = -\varepsilon\alpha + \beta(\alpha) \qquad (28.20)$$

と書ける。

- 初項は(28.19)の$\varepsilon\alpha$を打ち消すため
- 第二項はεの0次項を打ち消すので、

$$0 = -\alpha^2 G_1' + \beta(\alpha)$$

$$\therefore \beta(\alpha) = \alpha^2 G_1'(\alpha) \qquad (28.21)$$

$\frac{1}{\varepsilon}$の高次も同様にキャンセルするように$G_n(\alpha)$を決めると、$G_n'(\alpha)$は全て$G_1'(\alpha)$で表せる。

$$(\text{Ex } G_2'(\alpha) = \alpha G_1'(\alpha)^2)$$

(28.21)に(28.16)を代入すると、

$$\beta(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha^2 + O(\alpha^3) \qquad (28.22)$$

これは§27で、$|T|^2_{obs}$がμに依存しないとして導いた

$$(27.25)\ \frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} = -\frac{3}{2}\alpha^2 + O(\alpha^3)$$ に$\varepsilon \to 0$で一致

次にm_0を考える。

$$m_0 = Z_\psi^{-1/2} Z_m^{1/2} \ m \qquad (28.4\text{再})$$

同様に
$$M(\alpha, \varepsilon) \equiv \ln(Z_m^{1/2} Z_\psi^{-1/2})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \qquad (28.23)$$

を考えると、(28.10), (28.12)より

$$M_1(\alpha) = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 = -\frac{5}{12}\alpha + O(\alpha^2) \qquad (28.24)$$

(28.4)より

$$\ln m_0 = M(\alpha, \varepsilon) + \ln m \qquad (28.25)$$

$\ln\mu$で微分
$\Rightarrow$
$$0 = \frac{d}{d(\ln\mu)} \ln m_0$$
$$= \frac{\partial M}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)} + \frac{1}{m}\frac{dm}{d(\ln\mu)}$$
$$= \frac{\partial M}{\partial \alpha}(-\varepsilon\alpha + \beta(\alpha)) + \frac{1}{m}\frac{dm}{d(\ln\mu)} \qquad (28.26)$$
$(\because (28.20))$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dm}{d(\ln\mu)} = (\varepsilon\alpha - \beta(\alpha))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n'(\alpha)}{\varepsilon^n}$$
$$= \alpha M_1'(\alpha) + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (28.27)$$

a_0と同様に、$\varepsilon \to 0$で $\dfrac{dm}{d(\ln\mu)}$ が発散しない要請をすれば、

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$$

$\gamma_m(\alpha)$: 異常次元 を、

$$\gamma_m(\alpha) \equiv \frac{1}{m}\frac{dm}{d(\ln\mu)} \qquad (28.28)$$

とdefすると、

$$\gamma_m(\alpha) = \alpha M_1'(\alpha)$$

$$= -\frac{5}{12}\alpha + O(\alpha^2) \qquad (28.29)$$

とできる。((27.14)に一致)

次にプロパゲータに$\overline{MS}$スキームを用いる

$$\hat{\Delta}(k^2) = i\int d^6x\, e^{ikx}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(0)|0\rangle$$

(28.30)

裸のプロパゲーターは

$$\hat{\Delta}_0(k^2) = i\int d^6x\, e^{ikx}\langle 0|T\varphi_0(x)\varphi_0(0)|0\rangle$$

(28.31)

であり、同様にμに依存しない

(28.30)(28.31)は

$$\hat{\Delta}_0(k^2) = Z_\varphi \hat{\Delta}(k^2) \qquad (28.32)$$

の関係にある ($\because$ (28.3))

logをとって $\ln\mu$ で微分すると、

$$0 = \frac{d}{d(\ln\mu)}\ln\hat{\Delta}_0(k^2)$$

$$= \frac{d(\ln Z_\varphi)}{d(\ln\mu)} + \frac{d(\ln\hat{\Delta}(k^2))}{d(\ln\mu)}$$

$$= \frac{d(\ln Z_\varphi)}{d(\ln\mu)} + \frac{1}{\hat{\Delta}(k^2)}\frac{d\hat{\Delta}(k^2)}{d(\ln\mu)}$$

$$= \frac{d(\ln Z_\varphi)}{d(\ln\mu)} + \frac{1}{\hat{\Delta}(k^2)}\left[\frac{\partial}{\partial(\ln\mu)} + \frac{d\alpha}{d(\ln\mu)}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{dm}{d(\ln\mu)}\frac{\partial}{\partial m}\right]\hat{\Delta}(k^2)$$

(28.33)

((14.47)等から$\hat{\Delta}$はμに依存する)

(28.7)より

$$\ln Z_\varphi = \ln\left(1+\sum \frac{a_n}{\varepsilon^n}\right)$$

$$\simeq \left(\frac{a_1}{\varepsilon}+\frac{a_2}{\varepsilon^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}+\frac{a_2}{\varepsilon^2}+\cdots\right)^2$$

$$= \frac{a_1}{\varepsilon}+\frac{a_2-\frac{1}{2}a_1{}^2}{\varepsilon^2}+O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right) \qquad (28.34)$$

なので、

$$\frac{d(\ln Z_\varphi)}{d(\ln\mu)} = \frac{\partial(\ln Z_\varphi)}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{d(\ln\mu)}$$

$$= \left(\frac{a_1'}{\varepsilon}+\cdots\right)\left(-\varepsilon\alpha+\beta(\alpha)\right) \qquad (\because (28.20))$$

$$= -\alpha a_1' + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (28.35)$$

$\varepsilon\to 0$で$\hat{\Delta}(k^2)$がμについて滑らかであることを要請すると、(28.35)の$O(1/\varepsilon)$は0

場の異常次元を

$$\gamma_\varphi(\alpha) \equiv \frac{1}{2}\frac{d(\ln Z_\varphi)}{d(\ln\mu)} \qquad (28.36)$$

とすると

$$\gamma_\varphi(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha a_1'$$

$$= \frac{1}{12}\alpha + O(\alpha^2) \qquad (28.37)$$

以上より

$$(28.33) \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \left(\frac{\partial}{\partial(\ln\mu)}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma_m(\alpha)\frac{\partial}{\partial m}+2\gamma_\varphi(\alpha)\right)\hat{\Delta}(k^2)=0$$

(28.38): Callan-Symanzik equation
(カラン-シマンズィック)

特に $m\to 0$, $\alpha\neq 0$で $\beta(\alpha)=0$のときを考える

いくつかの$\alpha_*\neq 0$で、$\beta(\alpha_*)=0$となるような$\beta(\alpha)$で、$\alpha=\alpha_*$, $m\to 0$では(28.38)は第一,四項のみが残って、

$$\left(\frac{\partial}{\partial(\ln\mu)}+2\gamma_\varphi(\alpha)\right)\hat{\Delta}(k^2)=0 \qquad (28.39)$$

これを解くと、

$$\frac{1}{\hat{\Delta}} d\hat{\Delta} = -2\gamma_\phi\, d(\ln\mu)$$

$$\Rightarrow \ln\hat{\Delta} = \ln(C' \times \mu^{-2\gamma_\phi})$$

$$\Rightarrow \hat{\Delta} = C' \mu^{-2\gamma_\phi}$$

ここで $\hat{\Delta}$ の次元は M^{-2} なので、定数に k を入れて、

$$\hat{\Delta} = \frac{C(\alpha_*)}{k^2}\left(\frac{\mu^2}{k^2}\right)^{-\gamma_\phi(\alpha_*)}$$

つまり、$\hat{\Delta} \sim k^{-2}$ だったものが $\overline{MS}$ スキームにおいて $\hat{\Delta} \sim k^{-2+2\gamma_\phi}$ になる

臨界現象の理論に使えるらしい