$$= |T_0|^2 \left[1 - \alpha \left(\frac{11}{6} \ln \frac{s}{\mu^2} - \frac{1}{3} \ln \frac{s}{\mu^2} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{\delta^2} + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]$$

$$= |T_0|^2 \left[1 - \alpha \left(\frac{3}{2} \ln \frac{s}{\mu^2} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{\delta^2} + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right] \quad (27.22)$$

$\ln m^2$ の項が打ち消され、質量ゼロの極限でも well-defined な表式が得られた。また $|T|^2_{obs}$ も μ に依らないはずなので μ の変化が α の変化によって打ち消されている。これを使って μ と α の関係を調べる。

$|T_0|^2 = O(g^4) = O(\alpha^2)$ に注意して (27.22) の両辺に log をとって

$$\ln |T|^2_{obs} = C_1 + 2 \ln \alpha + 3\alpha (\ln \mu + C_2) + O(\alpha^2) \quad (27.23)$$

(C_1、C_2 は α、μ によらない定数)

(27.23) を $\ln \mu$ で微分する。($|T|^2_{obs}$ は μ によらないことに注意。)

$$0 = \frac{d}{d \ln \mu} \ln |T|^2_{obs}$$

$$= 2 \frac{d}{d \ln \mu} \ln \alpha + 3\alpha + O(\alpha^2)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{d \ln \mu} + 3\alpha + O(\alpha^2) \quad (27.24)$$

変形して

$$\frac{d\alpha}{d \ln \mu} = -\frac{3}{2} \alpha^2 + O(\alpha^2) \quad (27.25)$$

μの値は自由にとることができるので $\mu^2 \sim s$ ととると (27.22) で log の項が大きくなることを防げる。

(27.25) 式を右辺の先頭項のみ残して解くと

$$\frac{1}{\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{3}{2}\, d\ln\mu$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha(\mu_2)} - \frac{1}{\alpha(\mu_1)}\right) = -\frac{3}{2}\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\frac{1}{\alpha(\mu_2)} = \frac{1}{\alpha(\mu_1)} + \frac{3}{2}\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\alpha(\mu_2) = \frac{\alpha(\mu_1)}{1 + \frac{3}{2}\alpha(\mu_1)\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (27.26)$$

(27.26) の α は μ が増加 ($\mu_1 < \mu_2$) のとき小さくなる。このような性質を持つ理論は漸近的自由場とよぶ。このとき Tree-level の近似が高エネルギーになるほどよくなることが分かる.

粒子の質量がゼロでないとき、$\mu \sim m$ 程度までこの式が適用できる. なぜなら s の最小値が $4m^2$ なので $\mu \ll m$ のとき $\ln\frac{s}{\mu^2}$ の値が大きくなりすぎるためである。

粒子の質量がゼロのとき $\alpha(\mu)$ はエネルギーが小さくなるほど大きくなり、摂動が破綻する. これは低エネルギーの物理が摂動的な計算の結果と解離する可能性を示している。

ベータ関数の符号が正のときを赤外自由と呼び、このとき
αはμが増加すると、増加する。そして高エネルギーで摂動が破綻する。
量子電磁気学はこれに対応する。

ベータ関数が 0でないαに対して0になるときのふるまいは複雑である。
→ 次の章へ。

(*)の計算

$$
\circledast = \int_0^1 dx\, D_0 \ln \frac{D_0}{\mu^2}
$$

$$
= \int_0^1 dx\, (1-x+x^2) m^2 \ln \frac{(1-x+x^2) m^2}{\mu^2}
$$

$$
= m^2 \int_0^1 dx\, (1-x+x^2) \Big\{ \underbrace{\ln \frac{m^2}{\mu^2}}_{①} + \underbrace{\ln (1-x+x^2)}_{②} \Big\}
$$

$$
① = m^2 \int_0^1 dx\, (1-x+x^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} = m^2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{5}{6} m^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2}
$$

$$
② = m^2 \int_0^1 dx\, (1-x+x^2) \ln (1-x+x^2)
$$

$$
= m^2 \int_0^1 dx\, \left\{ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \ln \left\{ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \qquad x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t
$$

$$
= m^2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} dt\, \frac{3}{4} (t^2+1) \ln \frac{3}{4} (t^2+1)
$$

$$
= \frac{3\sqrt{3} m^2}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\, (t^2+1) \Big\{ \underbrace{\ln \frac{3}{4}}_{Ⓐ} + \underbrace{\ln (t^2+1)}_{Ⓑ} \Big\}
$$

$$Ⓐ = \frac{3\sqrt{3}m^2}{4}\ln\frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\,(t^2+1)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}m^2}{4}\ln\frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{3}}m^2}{\cancel{4}_{2}}\ln\frac{3}{4}\;\frac{\cancel{10}^{5}}{{}_{3}\cancel{9}\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{5m^2}{6}\ln\frac{3}{4}$$

$$Ⓑ = \frac{3\sqrt{3}m^2}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\,(t^2+1)\ln(t^2+1)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}m^2}{4}\left\{\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\ln(t^2+1)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\frac{2t}{t^2+1}\right.$$

$$= \frac{\cancel{3}\sqrt{3}m^2}{{}_{2}\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{10}^{5}}{{}_{3}\cancel{9}\sqrt{3}}\ln\frac{4}{3} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\,\frac{t^4+3t^2}{t^2+1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}m^2}{2}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln\frac{4}{3} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dt\left(t^2+2-\frac{2}{t^2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}m^2}{2}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln\frac{4}{3} - \left[\frac{t^3}{3}+2t-2\arctan t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}m^2}{2}\left\{\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{9\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= -\frac{5m^2}{6}\ln\frac{3}{4} - \frac{19m^2}{18} - \frac{\sqrt{3}\pi m^2}{6}$$

以上まとめて

$$★ = -\frac{5}{6}m^2\ln\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{19m^2}{18} - \frac{\sqrt{3}\pi m^2}{6}$$ これを(27.10)に代入

すると(27.11)が得られる

$$D = x(1-x)k^2 + m^2$$

(**)の計算

$$\Pi_{\overline{MS}}(k^2) = -\frac{1}{12}\alpha(k^2+6m^2) + \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\, D\ln\frac{D}{\mu^2} + O(\alpha^2)$$

$$\Pi'_{\overline{MS}}(k^2) = -\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\left\{x(1-x)\ln\frac{D}{\mu^2} + \cancel{D}\frac{x(1-x)}{\cancel{D}}\right\} + O(\alpha^2)$$

より

$$☆☆ = \Pi'_{\overline{MS}}(-m^2) = -\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\left\{x(1-x)\ln\frac{(1-x+x^2)m^2}{\mu^2} + x(1-x)\right\} + O(\alpha^2)$$

$$= -\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\int_0^1 dx\left\{\underbrace{x(1-x)\left(\ln\frac{m^2}{\mu^2}+1\right)}_{①} + \underbrace{x(1-x)\ln(1-x+x^2)}_{②}\right\} + O(\alpha^2)$$

$$① = \int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}+1\right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\left(\ln\frac{m^2}{\mu^2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\frac{m^2}{\mu^2}+1\right)$$

$$② = \int_0^1 dx\, x(1-x)\ln(1-x+x^2)$$

$$= \int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t = x - \frac{1}{2}$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2}dt\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\ln\frac{3}{4}(t^2+1)$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x^2\right)\left\{\underline{\ln\frac{3}{4}}_{Ⓐ} + \underline{\ln(x^2+1)}_{Ⓑ}\right\}$$

$$Ⓐ = \sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x^2\right)\ln\frac{3}{4}$$

$$= \sqrt{3}\ln\frac{3}{4}\left[\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{3}\ln\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}-\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{3}{4}$$

$$Ⓑ = \sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x^2\right)\ln(x^2+1)$$

$$= \sqrt{3}\left\{\left[\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\ln(x^2+1)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\frac{2x}{x^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\,\frac{x^2-x^4}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx\left(x^2-2+\frac{2}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x^3}{3}-2x+2\arctan x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3}{4} - \frac{17}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

よって

$$(☆☆) = -\frac{\alpha}{12} + \frac{1}{2}\alpha\left\{\frac{1}{6}\left(\ln\frac{m^2}{\mu^2}+1\right) - \frac{17}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right\} + O(\alpha^2)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\left\{\frac{1}{6}\ln\frac{m^2}{\mu^2} - \frac{17}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right\} + O(\alpha^2)$$

これを代入して(27.16)を得る.