2023年7月21日　　18:47

21 : The quantum action

> 目標：古典作用に量子補正を取り込んだ有効作用（quantum action）を定義し，連結 Green 関数の生成汎関数との関係をみる．
> また，有効ポテンシャル（quantum potential）の性質をみる．

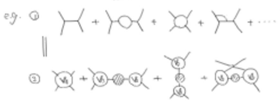
前回までの話

① プロパゲーター $-i\Delta(k)$ = —— と頂点 ig = ⅄ を用いて ループをすべて取り込んで計算

↕ 等価

② 厳密なプロパゲーター $-i\Delta(k)$ = —⊘— と 頂点関数 iV_n = (V_n) を用いてツリーレベルまで計算

e.g.



cf.

- 厳密なプロパゲーター

$$i\Delta(k) = —⊘— = —— + —(\mathrm{1PI})— + —(\mathrm{1PI})(\mathrm{1PI})— + \cdots = \frac{i}{k^2+m^2-\Pi(k^2)+i\epsilon}$$

- 厳密な（n点）頂点関数

$$iV_n(k_1,k_2,\cdots,k_n) = (V_n) = \bigcirc + \cdots$$

⇒ 今回考えること： $i\Delta(k)$ と $iV_n(\{k_i\})$ をそれぞれプロパゲーター・頂点としてもつような作用を作れば，それは量子ゆらぎをはじめから取り込んでいることになる．

ここで，そのような有効作用 $\Gamma(\varphi)$ を以下で定義する．

厳密なプロパゲーター（の逆数）

$$\Gamma(\varphi) = -\frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\tilde{\varphi}(-k)\,\underline{(k^2+m^2-\Pi(k^2))}\,\tilde{\varphi}(k) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d^dk_1}{(2\pi)^d}\cdots\frac{d^dk_n}{(2\pi)^d}(2\pi)^d\delta^d(k_1+\cdots+k_n) \times \underline{V_n(k_1,\cdots,k_n)}\,\tilde{\varphi}(k_1)\cdots\tilde{\varphi}(k_n)$$

頂点関数

cf.

$$S(\varphi) = \int d^dx\left[\frac{1}{2}\varphi(\partial^2-m^2)\varphi + \frac{g}{3!}\varphi^3\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(-k)(k^2+m^2)\tilde{\varphi}(k) + \frac{1}{3!}\int\frac{d^dk_1}{(2\pi)^d}\frac{d^dk_2}{(2\pi)^d}\frac{d^dk_3}{(2\pi)^d}(2\pi)^d\delta(k_1+k_2+k_3) \times g\,\tilde{\varphi}(k_1)\tilde{\varphi}(k_2)\tilde{\varphi}(k_3)$$

有効作用 $\Gamma(\varphi)$ によって計算されたツリーレベルのダイアグラムは，もとの理論のフルオーダーのダイアグラムと等しい．

※ 有効作用 $\Gamma(\varphi)$ は頂点関数 V_n の生成汎関数．

$$\Gamma(\varphi) = -\frac{1}{2}\int d^dx\,d^dy\,\varphi(x)\,\Delta^{-1}(x-y)\,\varphi(y) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^dx_1\cdots d^dx_n\,V_n(x_1,\cdots,x_n)\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$$

なので，

$$V_n(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\delta^n}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\Gamma(\varphi)\Big|_{\varphi=0} \quad (n=3,4,\cdots)$$

$$\Delta^{-1}(x-y) = -\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\Gamma(\varphi)\Big|_{\varphi=0}$$

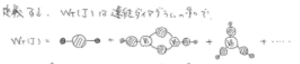
以下では，$\Gamma(\varphi)$ と連結 Green 関数の生成汎関数 $iW(J)$ との関係をみる．
$iW(J)$ は Helmholtz の自由エネルギーに対応するもので，

$$Z(J) = \int\mathcal{D}\varphi\, e^{iS(\varphi)+i\int d^dx J\varphi} = e^{iW(J)}$$

で定義されていた．
これに対応して，有効作用に対しても，

$$Z_\Gamma(J) = \int\mathcal{D}\varphi\, e^{i\Gamma(\varphi)+i\int d^dx J\varphi} = e^{iW_\Gamma(J)}$$

と定義する．$W_\Gamma(J)$ は連結ダイアグラムの和で，



（有効作用の意味で）ツリーレベルだけを含むことにすると

となって，これは $W(J)$ に一致する．
すなわち，

$$W(J) = W_\Gamma(J)\Big|_{\mathrm{tree}}$$

である．では，ツリーレベルだけを取り出すにはどうすればよいか？

→ （ループ数展開）＝（$\hbar$ でのべき展開）

ということを用いる．
$\hbar$ を復活させて（あるいは，無次元パラメーター $\hbar$ を導入して）

$$Z_{\Gamma,\hbar}(J) = \int\mathcal{D}\varphi\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma(\varphi)+i\int d^dx\,\varphi J\right)} = e^{iW_{\Gamma,\hbar}(\varphi)}$$

と定義すると，

プロパゲーター	（P コ）	⟶	$\hbar$
頂点	（V コ）	⟶	$1/\hbar$
ソース（外線）	（E コ）	⟶	$1/\hbar$

の因子がつく．
すなわち，任意のダイアグラムは $\mathcal{O}(\hbar^{P-E-V})$ である．
ここで，このダイアグラムのループを L コとすると，

$$\mathcal{O}(\hbar^{P-E-V}) = \mathcal{O}(\hbar^{L-1})$$

が成り立つから，ツリーレベル（L=0）のダイアグラムを見るには，$W_{\Gamma,\hbar}(J)$ のうち $\mathcal{O}(1/\hbar)$ のものだけを取り出せばよい．

cf. 内線 I = P−E コ，頂点 V コ，ループ L コとする．
一般に以下が成り立つ．

$$\boxed{\text{平面グラフ R に対し，}\ \chi(R) = 1\ .}$$

ここに，$\chi(R)$ は Euler 標数で，$\chi = L - I + V$
すなわち，　$L - 1 = I - V = P - E - V$ となる．
上ではこれを用いた．
あるいは運動量積分と δ関数を数えて同じ式を得る．

$$\underbrace{(P-E)}_{\text{決めるべきp}} - \underbrace{(V-1)}_{\text{拘束条件}} = \underbrace{L}_{\text{決まらないp}}$$

したがって，$W_{T,\hbar}(J)$ を $\hbar$ でループの個数で展開したとき，

$$W_{T,\hbar}(J) = \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1} W_{T,L}(J)$$

$\hbar \to 0$ の極限をとれば，$L=0$ の項だけが残る．

$$\lim_{\hbar \to 0} W_{T,\hbar}(J) \sim W_T(J)\Big|_{\text{tree}} = W(J)$$

次に，$\Gamma(\varphi)$ と $W(J)$ の関係を，経路積分を通じてみる．

$$Z_{T,\hbar}(J) = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma(\varphi) + \int d^dx\, \varphi J\right)}$$

は，$\hbar$ が十分小さいとき鞍点法で評価できる．
各 $J(x)$ に対して鞍点 $\varphi_J(x)$ は

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\Gamma(\varphi) + \int d^dx'\, \varphi(x')J(x')\right) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma(\varphi) + J(x) = 0$$

を満たす．これを用いて

$$Z_{T,\hbar}(J) = e^{\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma(\varphi_J) + \int d^dx\, \varphi_J J\right)} + \mathcal{O}(\hbar^0)$$

よって，

$$W(J) = \Gamma(\varphi_J) + \int d^dx\, \varphi_J J$$

が成り立つ．
さらに，ソース J ありの $\varphi(x)$ の真空期待値 $\langle\varphi(x)\rangle_J$ を考えると，

$$\langle\varphi(x)\rangle_J = \frac{1}{Z(J)}\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\, e^{iS(\varphi) + i\int d^dx'\, \varphi(x')J(x')}$$
$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} \ln Z(J) = \frac{\delta}{\delta J(x)} W(J)$$

で与えられるが，$W(J) = \Gamma(\varphi_J) + \int d^dx\, \varphi_J J$ なので，

$$\langle\varphi(x)\rangle_J = \frac{\delta}{\delta J}\left(\Gamma(\varphi_J) + \int d^dx'\, \varphi_J(x')J(x')\right)$$
$$= \frac{\delta\Gamma(\varphi_J)}{\delta J(x)} + \varphi_J(x) + \int d^dx' \frac{\delta\varphi_J(x')}{\delta J(x)} J(x')$$
$$= \int d^dx' \underbrace{\left(\frac{\delta\Gamma(\varphi_J)}{\delta\varphi_J(x')} + J(x')\right)}_{=0} \frac{\delta\varphi_J}{\delta J(x)} + \varphi_J(x)$$
$$= \varphi_J(x)$$

したがって，　$\langle\varphi(x)\rangle_J = \varphi_J(x)$　を得る．

まとめると，

$$W(J) \xmapsto[\varphi_J = \frac{\delta W(J)}{\delta J}]{} \Gamma(\varphi_J) = W(J) - \int d^dx\, \varphi_J J$$

すなわち，有効作用 $\Gamma(\varphi_J)$ は $W(J)$ の Legendre 変換となっている．
したがって，逆 Legendre 変換によって $\Gamma(\varphi)$ から $W(J_\varphi)$ に戻れる．

$$\Gamma(\varphi) \xmapsto[J_\varphi = -\frac{\delta\Gamma(\varphi)}{\delta\varphi}]{} W(J_\varphi) = \Gamma(\varphi) + \int d^dx\, \varphi J_\varphi$$

有効作用 $\Gamma(\varphi)$ は もとの作用に量子効果を有効的に取り込んだものであるから，$\hbar \to 0$ で $S(\varphi)$ に一致することが期待される．
実際，

$$e^{iW(J)} = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(S(\varphi) + \int d^dx\, \varphi J\right)}$$
$$\overset{\hbar\to 0}{\simeq} e^{\frac{i}{\hbar}\left(S(\varphi_J) + \int d^dx\, \varphi_J J\right)}$$
$$\left(\varphi_J \text{ は } \frac{\delta S}{\delta\varphi} + J = 0 \text{ の解}\right)$$

より，$W(J)$ は $\hbar \to 0$ で $S(\varphi)$ の φ による Legendre 変換．
よって，

$$\Gamma(\varphi) \overset{\hbar\to 0}{\simeq} S(\varphi)$$

言いかえれば，

$$\Gamma(\varphi) = S(\varphi) + (\text{quantum correction})$$

古典的なポテンシャルは，

$$V(\varphi) = \frac{S(\varphi)}{-\int d^dx}\Bigg|_{\varphi:\text{uniform}}$$

によって与えられていた．同様に，これに量子補正を加えたものとして

$$\mathcal{U}(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{-\int d^dx}\Bigg|_{\varphi:\text{uniform}}$$

を考えれば，これは量子ゆらぎの効果をとり入れたポテンシャルで，
有効ポテンシャル（quantum potential，effective potential）とよばれる．
有効ポテンシャルは 時空のエネルギー密度に対応し，場の真空期待値 $\langle\varphi\rangle$ は，$\mathcal{U}(\langle\varphi\rangle)$ を最小とするものとして実現される．

例．時空に依存しない ソース $J(x) = \mathcal{J}$ を入れて考える．

$$Z(\mathcal{J}) = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS(\varphi) + i\int d^dx\, \varphi\mathcal{J}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\mathcal{J})^n}{n!}\left(\int d^dx_1 \cdots \int d^dx_n\right) \underbrace{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{iS(\varphi)}}_{\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle}$$
$$= \langle 0|T e^{i\mathcal{J}\int d^dx\, \varphi(x)}|0\rangle$$
$$= \langle 0|\underline{e^{iT\hat{H}} e^{-i(T-T_0)\hat{H}(\mathcal{J})} e^{-iT_0\hat{H}}}|0\rangle$$

相互作用描像の
時間発展 op.
（cf. 量子力学）

$$= \langle 0|e^{-i(T-T_0)\hat{H}(\mathcal{J})}|0\rangle$$
$$= \sum_n \langle 0|e^{-i(T-T_0)E_n(\mathcal{J})}|E_n(\mathcal{J})\rangle\langle E_n(\mathcal{J})|0\rangle$$
$$\xrightarrow[T-T_0 \to (1-i\epsilon)\infty]{} e^{-i(T-T_0)\underline{E_0(\mathcal{J})}}\langle 0|E_0(\mathcal{J})\rangle\langle E_0(\mathcal{J})|0\rangle$$

ハミルトニアンの最低固有値
（真空のエネルギー）

ここで，$Z(\mathcal{J}) = e^{iW(\mathcal{J})}$ から，

$$W(\mathcal{J}) = -E_0(\mathcal{J})\int dt = -\mathcal{E}_0(\mathcal{J})\int d^dx$$

を得る．

よって，

$$\Gamma(\langle\varphi\rangle_{\mathcal{J}}) = W(\mathcal{J}) - \mathcal{J}\int d^dx\, \langle\varphi\rangle_{\mathcal{J}}$$
$$= -\mathcal{E}_0(\mathcal{J})\int d^dx - \mathcal{J}\int d^dx\, \langle\varphi\rangle_{\mathcal{J}}$$

$\mathcal{J} = 0$ とすると，

$$\Gamma(\langle\varphi\rangle) = -\mathcal{E}_0\int d^dx$$

すなわち，

$$\mathcal{U}(\langle\varphi\rangle) = \mathcal{E}_0 .$$

さらに，

$$\frac{\partial\mathcal{U}(\langle\varphi\rangle)}{\partial\langle\varphi\rangle} = -\frac{1}{\int d^dx}\frac{\partial\Gamma(\langle\varphi\rangle_{\mathcal{J}})}{\partial\langle\varphi\rangle_{\mathcal{J}}}\Bigg|_{\mathcal{J}=0} = \frac{1}{\int d^dx}\mathcal{J} = 0 .$$

であるから，結局，$\mathcal{U}(\varphi)$ を最小化する φ が真空期待値 $\langle\varphi\rangle$ であり，そのときの $\mathcal{U}(\langle\varphi\rangle)$ が真空のエネルギー密度である．
量子効果をとり入れることで対称性が自発的に破れることがある．

e.g. Coleman-Weinberg ポテンシャル

$$V_{古典}(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{U}(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2\varphi^4}{256\pi^2}\left\{\ln\left(\frac{\varphi^2}{M^2}\right) - \frac{25}{6}\right\} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$