No.

目標：不連続的対称性（特にC,P,T）の性質について知る

Date 7.2

§23. 不連続な対称性：P,T,C,Z

§2では、恒等変換と連続的につながる固有順時ローレンツ群を学んだ。

proper orthochronous Lorentz transformation

このセクションでは、

パリティ（parity）

$$\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{P}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (23.1)$$

と時間反転（time riversal）を考える

花文字

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = (\mathcal{T}^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad (23.2)$$

あと、荷電共役変換（charge conjugation）も考える

§2では、各固有順時ローレンツ群 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は対応するユニタリ演算子 $U(\Lambda)$ があって、

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x) \quad (23.3)$$

であった。パリティと時間反転も、対応するユニタリ演算子があると予想できて、

花文字

$$P \equiv U(\mathcal{P}) \quad (23.4)$$

$$T \equiv U(\mathcal{T}) \quad (23.5)$$

such that

ここも -1 にしたいけど、(23.3)と合わせるには、どっちにしろ同じなのでまぁいいことにする。

$$P^{-1}\varphi(x)P = \varphi(\mathcal{P}x) \quad (23.6)$$

$$T^{-1}\varphi(x)T = \varphi(\mathcal{T}x) \quad (23.7)$$

しかし、追加のややこしさがある。$\mathcal{P},\mathcal{T}$ 行列は自分自身が逆行列なので、もう1回変換すると、もとにもどる。$\mathcal{P}^2=1$, $\mathcal{T}^2=1$ と(23.6),(23.7)を用いると、

$$P^{-1}(P^{-1}\varphi(x)P)P = P^{-1}\varphi(\mathcal{P}x)P = \varphi(\mathcal{P}^2x) = \varphi(x)$$

$$= P^{-2}\varphi(x)P^2$$

$$\longrightarrow P^{-2}\varphi(x)P^2 = \varphi(x) \quad (23.8)$$

$$T^{-2}\varphi(x)T^2 = \varphi(x) \quad (23.9)$$

$\varphi(x)$ はエルミート演算子なので原理的に observable であり、(23.8),(23.9)は我々の予想したものと合う。しかし、場へのパリティ変換の別の可能性もあって

$$P^{-1}\varphi(x)P = -\varphi(\mathcal{P}x) \quad (23.10)$$

$$T^{-1}\varphi(x)T = -\varphi(\mathcal{T}x) \quad (23.11)$$

このマイナス符号の可能性は固有順時ローレンツ変換では出てこない。なぜなら、固ローレンツ変換は恒等変換と連続的につながっており、明らかにプラス符号しかないから。

No.

Date 7・2

右辺にマイナス符号が表れるとき、場は odd under parity といい (パリティが奇).
(or time reversal)

スカラー場のパリティが奇のとき、「pseudoscalar」(擬スカラー)(注) という

(注) (擬スカラー: (固)ローレンツ変換ではスカラーと同じようにふるまう
つまり (23.3) $U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda)=\varphi(\Lambda^{-1}x)$ には従う
スカラーの名称は (23.3)と、(23.6)か(23.10)をみたすときに用いられる)

(23.6)と(23.7)なのか、(23.10)と(23.11)なのか、どうやって知ればいい?
一般的な答えは、「選んでいいが、選択を導く鍵となる原理がない」
できれば!! lagrangian density を偶にするように P, T をきめたい

$$P^{-1}\mathcal{L}(x)P=+\mathcal{L}(\mathcal{P}x) \quad (23.12)$$
$$T^{-1}\mathcal{L}(x)T=+\mathcal{L}(\mathcal{T}x) \quad (23.13)$$

このとき、$\int d^4x$ で積分して作用 S にすると、S は不変
∴ パリティ、時間反転は保存される

spin 0 の理論だけのときは、(23.6),(23.7) を選べば明らかに
(23.12),(23.13) が満たされる。(23.10),(23.11) に悩まされることはない。
spin ½ の理論を含むときは、スカラー双線型 (scalar bilinears) が
パリティと時間反転で奇となる必要があることがある (→ §40)
もしスカラー場が bilinear と結合するなら、(23.10) と (23.11) を選んだときに
(23.12),(23.13) が保たれる。

もう1つのおもしろい事実として、時間反転演算子 T は反ユニタリである。
$T^{-1}iT=-i$

なぜこうなるのかみるために、エネルギー運動量4元ベクトルのローレンツ変換を考える。

$$U(\Lambda)^{-1}P^{\mu}U(\Lambda)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \quad (23.14)$$
(2.15 参照)

パリティと時間反転では

$$P^{-1}P^{\mu}P=\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \quad (23.15)$$
$$T^{-1}P^{\mu}T=\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \quad (23.16)$$

と予想する

No.

Date 7.2

特に、$\mu = 0$のとき

$$P^{-1}HP = +H$$
$$T^{-1}HT = -H$$

であってほしい。1つ目はOK。ハミルトニアンは今回はパリティ変換のもとで不変

注2) スピン$\frac{1}{2}$のときは (23.6)か(23.10)をみたしながら (23.15)をみたすような演算子は存在しない。∴パリティは明確に破れている。

2つ目 (23.6) は disaster.

時間反転でハミルトニアンが不変なのは、$H = -H$ のときだけ $\leftrightarrow H = 0$

(23.16)の右辺に追加のマイナスをつけるのはどうだろうか。→ ダメ. つける方法がないからダメ

§22の中の場の項でP^μを明確に定義したが、場として(23.11)を選ぶことは、エネルギー運動量4元ベクトルのために(23.16)に追加のマイナスをつけることにはならない。

§22でのH

$$H = T^{00} = \frac{1}{2}\Pi_a^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_a)^2 + g^{\mu\nu}\mathcal{L} \qquad (22.32)$$
$$T^{-1}\varphi(x)T = -\varphi(\mathcal{T}x) \qquad (23.11) \quad より$$

2乗で入っているので、Hの符号はかわらない

原点の(23.14)にもどって考える。まず、時空変換演算子(spacetime translation) 逆進演算子

$$T(a) = \exp[-iP\cdot a]$$

(このTと時間反転のTを混同しないよう注意！) は

$$T(a)^{-1}\varphi(x)T(a) = \varphi(x-a)$$

spacetime translationはラベルとして時空座標をもつスカラー

(23.3) $U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$ の類似で、

$$U(\Lambda)^{-1}T(a)U(\Lambda) = T(\Lambda^{-1}a) \quad (23.19)$$

a^μを無限小と扱ったら、

$$U(\Lambda)^{-1}(I + ia_\mu P^\mu)U(\Lambda) = I - i(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu a_\mu P^\nu$$
$$= I - i\Lambda^\mu{}_\nu a_\mu P^\nu$$

これはただの1であるはず。(演算子だからちがうかい。恒等演算子)

$$T^{-1}(I - ia_\mu P^\mu)T = I - i\mathcal{T}^\mu{}_\nu a_\mu P^\nu$$

両辺の係数$-ia_\mu$をとると、

$$T^{-1}P^\mu T = \mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$$

比) (23.16) $T^{-1}P^\mu T = \mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu$ (同じものが出てくる)

追加のマイナスをつけるためには、

$$T^{-1}iT = -i \qquad (23.22)$$

として反ユニタリにしなければならない

No.
Date 7.3

このとき $T^{-1}P^{\mu}T = -T^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}$ (23.23)
(23.16)の代わりにこれを使えば、$T^{-1}HT=+H$ となり
時間反転で正しい表現になる。

スカラー場の符号はかえるが、時空間の偏角には何もしない
他のユニタリ演算子を考える。実スカラー場 $\varphi_a(x)$ と、
ユニタリ演算子を Z として、

$$Z^{-1}\varphi_a(x)Z = \eta_a\varphi_a(x). \quad (23.24)$$

$(\eta_a = +1 \text{ or } -1$ (aによってそれぞれ))

であるような理論を考える。Zのことを $\mathbb{Z}_2$ 演算子とよぶ。
* $\mathbb{Z}_2$は2を法とした整数の加群で、これは+1と−1の乗法群と同等なため
これより、$Z^2=1$、で、$Z^{-1}=Z$.
(これはspin0の場合だけで、P、Tでは同じことは正しいが、
higher spinではより巧妙らしい → part II)

§22で導入した複素スカラー場を考えてみよう $\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2)$

$$\mathcal{L} = -\partial^{\mu}\varphi^{\dagger}\partial_{\mu}\varphi - m^2\varphi^{\dagger}\varphi - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^{\dagger}\varphi)^2 \quad (23.25)$$
$$= -\frac{1}{2}\partial^{\mu}\varphi_1\partial_{\mu}\varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^{\mu}\varphi_2\partial_{\mu}\varphi_2 - \frac{1}{2}m(\varphi_1^2+\varphi_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\varphi_1^2+\varphi_2^2)^2 \quad (23.26)$$

(23.25)から明らかに$\mathcal{L}$は$U(1)$不変

$$\varphi(x)\to e^{-i\alpha}\varphi(x) \quad (23.27)$$

(23.26)から$\mathcal{L}$は明らかに$SO(2)$不変

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix} \quad (23.28)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^2+\varphi_2^2 &\to (\cos\alpha\,\varphi_1+\sin\alpha\,\varphi_2)^2+(-\sin\alpha\,\varphi_1+\cos\alpha\,\varphi_2)^2\\
&= \varphi_1^2\cos^2\alpha + \cancel{2\varphi_1\varphi_2\sin\alpha\cos\alpha} + \sin^2\alpha\,\varphi_2^2\\
&\quad + \varphi_1^2\sin^2\alpha - \cancel{2\varphi_1\varphi_2\sin\alpha\cos\alpha} + \cos^2\alpha\,\varphi_2^2\\
&= \varphi_1^2+\varphi_2^2\end{aligned}$$

No.

Date 7.3

しかし、$\mathcal{L}$は明らかに追加の不連続な対称性をもっていて、

$$\varphi(x) \longleftrightarrow \varphi^{+}(x) \quad (23.29)$$

(or)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (23.30)$$

これは荷電共役変換という。連続なU(1)対称に匹敵するもの。

実スカラー場では、SO(2)をO(2)に大きくする。

orthogonal: 直交 $P^T P = 1$

荷電共役変換の演算子 C ($\in Z_2$演算子) は、

© $$C^{-1}\varphi(x)C = \varphi^{+}(x). \quad (23.31)$$

(or)

$$C^{-1}\varphi_1(x)C = +\varphi_1(x) \quad (23.32)$$

$$C^{-1}\varphi_2(x)C = -\varphi_2(x) \quad (23.33)$$

これより、

$$C^{-1}\mathcal{L}(x)C = \mathcal{L}(x) \quad (23.34)$$

→ © は、対称な理論。物理的には、all a-タイプの粒子 (電荷 +1) と b-タイプの粒子 (電荷 −1) を入れかえても散乱振幅は変わらないことを示す。これは、a と b の mass が正確に同じときのはずで、このとき b は a の反粒子という。

F) 一般的に、反粒子が関係しない Z_2対称性がある。例として、φ^4理論で、φは実スカラーのときを考える。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{24}\lambda\varphi^4 \quad (23.35)$$

もしZ_2演算子Zが

$$Z^{-1}\varphi(x)Z = -\varphi(x) \quad (23.36)$$

をみたすなら、$\mathcal{L}$は明らかに不変。このとき

$$Z^{-1}HZ = H \quad (H: \text{hamiltonian}).$$

$$\left(\begin{array}{l} H = \frac{1}{2}\Pi_a^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_a)^2 + V(\varphi) \quad (22.32) \\ \text{これは } \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_a\partial_\mu\varphi_a - V(\varphi) \quad (22.30) \text{ から出} \end{array} \right)$$

なので、$[Z, H] = 0$

No.
Date 7.3

基底状態は独特(unique)になりそう。ZがHと交換するので、基底状態はZの固有状態になる。Zの位相を固定できて、

$$Z|0\rangle = Z^{-1}|0\rangle = +|0\rangle \qquad (23.37)$$

(これは(23.36)では決まってない位相分)

$Z^2|0\rangle = |0\rangle$
∴固有値は$e^{i\theta}$

(23.36)と(23.37)より $\boxed{ZZ^{-1}=1}$

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \langle 0|ZZ^{-1}\varphi(x)ZZ^{-1}|0\rangle \overset{(23.36)}{=} \langle 0|Z(-\varphi(x))Z^{-1}|0\rangle \overset{(23.37)}{=} -\langle 0|\varphi(x)|0\rangle \qquad (23.38)$$

$$\therefore \langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0$$

基底状態は独特で、φ^4理論のZ_2対称性では場の真空期待値はゼロ。よってこの場合、φ^3理論でやったように、くりこみ項$Y\varphi$を入れなくてもいい。
(独特な基底状態の前提は、必ずしも保たれない → §30)

① 反粒子は負のエネルギー解とかのときに出てきたから、基底状態がゼロなら出てこないってこと?
② このままだとHの固有状態は全部Zの固有状態になってそう
→ $Z|u\rangle =$ (?何かわからない)ので大丈夫か