2023年7月21日　　18:26

レジュメ

2023年4月15日 土曜日　　9:07

担当：鶯原泰輝

$\boxed{\text{目標}}$

無限小ローレンツ変換の性質を確認した後、演算子の交換関係を導く。その後、量子スカラー場がローレンツ変換のもとでどうなるかを考える。

。ローレンツ不変性

ローレンツ変換：$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ (2.1)

ローレンツ変換では、x^{μ}と原点との距離の2乗x^2は保存される。

$$x^2 \equiv x^{\mu} x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \vec{x}^2 - c^2 t^2 \quad (2.2)$$

ここで $g_{\mu\nu}$はミンコフスキー計量

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

である。

$x'^2 = x^2$ なので、

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (2.4)$$

となる。

ローレンツ変換の中には通常の座標変換も含まれる。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

R：直交回転行列

ローレンツ変換の性質

- 2つのローレンツ変換の積が別のローレンツ変換で表される
- 積は結合法則を満たす
- 同一変換 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ が存在する。
- 逆変換が存在する。

逆変換の求め方

(2.4)式の左辺 $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \Lambda_{\nu\rho}\Lambda^\nu{}_\sigma$

両辺の添え字ρを上げて、

$$\Lambda_\nu{}^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$$

一方定義から、$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu\Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$

なので、$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\rho \qquad (2.5)$

2.4式を書きかえると、

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g^{\rho\sigma} \qquad (2.6)$$

(導出：2.4式に逆変換作用させて、

$g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma$

$\qquad = g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$

$g_{\mu\nu} \qquad = g_{\rho\sigma}\Lambda_\rho{}^\nu\Lambda_\sigma{}^\mu$

$g^{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g^{\rho\sigma}$)

無限小ローレンツ変換は、以下のようにかける。

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \qquad (2.7)$$

これを、2.4式に代入して$\delta\omega$の2次の項を無視すると、

$$g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \delta\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \delta\omega^\nu{}_\rho) = g_{\rho\sigma}$$

(左辺) $= g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \delta\omega^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \delta^\mu{}_\rho\delta\omega^\nu{}_\sigma)$

$\qquad = g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}\delta\omega^\mu{}_\rho + g_{\rho\nu}\delta\omega^\nu{}_\sigma$

なので、$g_{\mu\sigma}\delta\omega^\mu{}_\rho + g_{\rho\nu}\delta\omega^\nu{}_\sigma = 0$

つまり、$\delta\omega_{\sigma\rho} + \delta\omega_{\rho\sigma} = 0$

$$\delta\omega_{\rho\sigma} = -\delta\omega_{\sigma\rho} \qquad (2.8)$$

となる。

よって、4次元空間には6つの独立した微小変換があり、3つの回転と3つの並進を表わす。

2.5式の行列式をとると、$(\det\Lambda)^{-1} = \det\Lambda$ なので、$\det\Lambda = \pm 1$ となる。
$\det\Lambda = 1$：固有(本義)ローレンツ変換
$\det\Lambda = -1$：非固有ローレンツ変換
固有ローレンツ変換では、向きが保存される。固有ローレンツ変換の積は固有で、無限小変換 $1+\delta\omega$ も固有変換である。固有ローレンツ変換はローレンツ変換の部分群を成す。

時間の方向を保存するローレンツ変換を順時ローレンツ変換という。この変換もローレンツ変換の部分群を成す。順時ローレンツ変換では $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ である。2.4式で $\mu=\nu=0$ 成分は $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 \geq 1$ なので $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ もしくは $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ である。$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ の変換を、逆時ローレンツ変換という。無限小変換は直交変換である。

つまり、無限小変換を組み合わせてできる変換は、固有かつ順時間向きである。この部分群から外れる変換として、パリティ変換と時間反転がある。パリティ変換は、

$$P^\mu{}_\nu = (P^\nu{}_\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

で、順時間的だが、非固有ローレンツ変換である。
時間反転は

$$T^\mu{}_\nu = (T^\nu{}_\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

で、逆時間的かつ非固有ローレンツ変換である。

一般に、ある理論がローレンツ不変であるとき固有順時ローレンツ群での話である。パリティや時間反転は別に扱われる。

以下は、固有順時ローレンツ群での話。量子論では、対称性はユニタリー（あるいは反ユニタリー）演算子で表される。ユニタリー演算子は次の合成則に従う。

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda) \quad (2.11)$$

無限小変換の場合、次のように書ける。

$$U(1+\delta\omega) = I + \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

ここで $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ はローレンツ群の生成子とよばれるエルミート演算子の集合である。

$U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)$ で

$\Lambda' = 1+\delta\omega'$ とすると、

$$U(\Lambda)^{-1}\left(I+\frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}(1+\delta\omega')\Lambda)$$

$$\begin{aligned}
I+\frac{i}{2\hbar}\delta\omega'_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= U(1+\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda) \\
&= I+\frac{i}{2\hbar}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\alpha}\delta\omega'^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M_{\beta}{}^{\sigma} \\
&= I+\frac{i}{2\hbar}\delta\omega'_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}\Lambda_{\beta}{}^{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M_{\beta}{}^{\sigma} \\
&= I+\frac{i}{2\hbar}\delta\omega'_{\mu\nu}(g^{\rho\beta}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\alpha}_{(\beta)})\Lambda_{\beta}{}^{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M_{\beta}{}^{\sigma} \\
&= I+\frac{i}{2\hbar}\delta\omega'_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

なので $\delta\omega_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \delta\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M$ (2.13)

$$\delta\omega_{\mu\nu}U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \delta\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}$$

となる。$\delta\omega_{\mu\nu}$ は反対称であれば何でもよいので、

$$U(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\rho}M^{\rho\sigma} \quad (2.14)$$

となる。4元運動量 P^{μ} についても、この結果から類推するに、

$$U(\Lambda)^{-1}P^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \quad (2.15)$$

となる。ただし $P^{0} = H$（ハミルトニアン）

さて、(2.14)式に $\Lambda = 1 + \delta\omega$ を代入すると

$$\left(I - \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}\right) M^{\mu\nu} \left(I + \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}\right) = (\delta^\mu{}_\rho + \delta\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \delta\omega^\nu{}_\sigma) M^{\rho\sigma}$$

$\delta\omega$ の一次の項をぬき出すと、

$$\text{左辺} = \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$$

$$\text{右辺} = \delta\omega^\mu{}_\rho M^{\rho\nu} + \delta\omega^\nu{}_\sigma M^{\mu\sigma} = \delta\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma})$$

ここで、左辺の係数は $\rho \leftrightarrow \sigma$ に対して反対称である。よって右辺を変形して、

$$\text{右辺} = \delta\omega_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + \frac{1}{2}g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right)$$

反対称なので、 $= \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho})$

以上より $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\hbar(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)$ (2.16)

となる。この交換関係はローレンツ群のリー代数を規定する。角運動量演算子 J の成分を $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}$ とし、並進演算子 K の成分を、$K_i = M^{i0}$ とする。(2.16)式より

$$[J_i, J_j] = \frac{1}{4}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}[M^{lm}, M^{kn}]$$
$$= \frac{i\hbar}{4}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}(g^{lk}M^{mn} - g^{mk}M^{ln} - g^{ln}M^{mk} + g^{mn}M^{lk})$$
$$= \frac{i\hbar}{4}(\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}g^{mn}M^{lk} + \varepsilon_{iml}\varepsilon_{jkn}g^{mn}M^{lk} - \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}g^{mn}M^{lk} + \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}g^{mn}M^{lk})$$
$$= i\hbar\,\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}\delta^{mn}M^{lk}$$
$$= i\hbar\,\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkm}M^{lk}$$
$$= i\hbar(\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj})M^{lk}$$
$$= i\hbar M^{ij}$$
$$= i\hbar\,\varepsilon_{ijk}J_k \quad \text{となる。}$$

$$[K_i, K_j] = [M^{i0}, M^{j0}]$$
$$= i\hbar(g^{ij}M^{00} - g^{0j}M^{i0} - g^{i0}M^{0j} + g^{00}M^{ij})$$
$$= -i M^{ij}$$
$$= -i\varepsilon_{ijk}J_k \ .$$

$$
\begin{aligned}
[J_i, K_j] &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}[M^{kl}, M^{j0}] \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\, i\hbar(g^{kj}M^{l0} - g^{lj}M^{k0} - g^{k0}M^{lj} + g^{l0}M^{kj}) \\
&= \frac{i\hbar}{2}\varepsilon_{ikl}(g^{kj}M^{l0} - g^{lj}M^{k0}) \\
&= \frac{i\hbar}{2}(\varepsilon_{ikl}\, g^{kj}M^{l0} - \varepsilon_{ilk}\, g^{kj}M^{l0}) \\
&= i\hbar\, \varepsilon_{ikl}\, \delta^{kj} M^{l0} \\
&= i\hbar\, \varepsilon_{ijl} M^{l0} \\
&= i\hbar\, \varepsilon_{ijk} K_k
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k \\
[J_i, K_j] &= i\hbar\, \varepsilon_{ijk} K_k \\
[K_i, K_j] &= -i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

となる。

3つ目から、並進が回転と等価であることが分かる。

同様に $\Lambda = 1 + \delta\omega$ を2.15式に代入して

$$U(\Lambda)^{-1} P^\mu U(\Lambda) = (1+\delta\omega)^\mu{}_\sigma P^\sigma$$

$$\left(1 - \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) P^\mu \left(1 + \frac{i}{2\hbar}\delta\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) = (\delta^\mu{}_\sigma + \delta\omega^\mu{}_\sigma) P^\sigma$$

一次の項をぬき出して

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2\hbar}[P^\mu, M^{\rho\sigma}]\,\delta\omega_{\rho\sigma} &= \delta\omega^\mu{}_\sigma P^\sigma \\
&= \delta\omega_{\rho\sigma}\, g^{\mu\rho} P^\sigma
\end{aligned}
$$

左辺の係数が反対称なので、右辺も反対称として、

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \delta\omega_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\rho}P^\sigma + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}P^\rho + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}P^\sigma - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}P^\rho\right) \\
&= \delta\omega_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\rho}P^\sigma - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}P^\rho\right)
\end{aligned}
$$

よって、$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i\hbar(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho)$ (2.18)

となる。この式から

$$
\begin{aligned}
[J_i, H] &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[M^{jk}, P^0] \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(g^{0j}P^k - g^{0k}P^j) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$[J_i, P_j] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}[M^{lm}, P_j]$$
$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}[P^j, M^{lm}]$$
$$= -\frac{i\hbar}{2}\varepsilon_{ilm}\, g_{jk}(g^{km}P^l - g^{kl}P^m)$$
$$= -\frac{i\hbar}{2}\varepsilon_{ilm}(\delta^m{}_j P^l - \delta^l{}_j P^m)$$
$$= i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$$

$$[K_i, H] = [M^{i0}, P^0]$$
$$= -i\hbar[g^{00}P^i - g^{0i}P^0)$$
$$= i\hbar P_i$$

$$[K_i, P_j] = [M^{i0}, P_j]$$
$$= -i\hbar(g^{j0}P^i - g^{ji}P^0)$$
$$= i\hbar\delta_{ij}H$$

量子スカラー場がローレンツ変換のもとでどうなるかを考える。ハイゼンベルク描像での時間発展

$$e^{+iHt/\hbar}\phi(x,0)\,e^{-iHt/\hbar} = \phi(x,t) \quad (2.21)$$

これを相対論的に一般化して

$$e^{-iPx/\hbar}\varphi(0)\,e^{+iPx/\hbar} = \varphi(x) \quad (2.22)$$

ここで、$Px = P^\mu x_\mu = \mathbf{P}\cdot\mathbf{x} - Hct$

ユニタリー時空変換演算子を以下のように定義する

$$T(a) \equiv \exp(-iP^\mu a_\mu/\hbar) \quad (2.23)$$

このとき、$T(a)^{-1}\varphi(x)T(a) = \varphi(x-a)$ (2.24)

となる。無限小変換のとき

$$T(\delta a) = I - \frac{i}{\hbar}\delta a_\mu P^\mu \quad (2.25)$$

2.12式と2.25式を見比べると、(2.24)式から

$$U(\Lambda)^{-1}\varphi(x)U(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.26)$$

となると類推される。

φの微分を考えると、

$$U(\Lambda)^{-1}\partial^\mu\varphi(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\bar{\partial}^\rho\varphi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.27)$$

ここで、バーは引数 $\bar{x} = \Lambda^{-1}x$ についての微分であることを表す。もう一度微分して、

$$U(\Lambda)^{-1}\partial^2\varphi(x)U(\Lambda) = \bar{\partial}^2\varphi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.28)$$

よって、Klein-Gordon方程式

$(-\partial^2 + m^2c^2/\hbar^2)\varphi = 0$ はローレンツ不変。